

Résistance des matériaux :

élasticité, méthodes énergétiques, méthode des éléments finis

Rappels de cours et exercices avec solutions

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

20 juin 2011

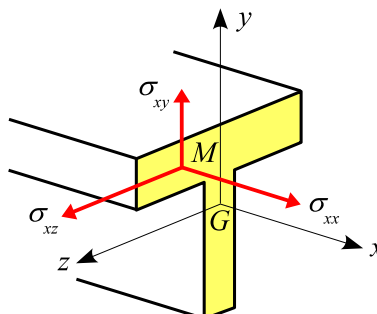


Table des matières

1	Élasticité	1
1.1	Rappels	1
1.1.1	Déplacements et déformations	1
1.1.2	Contraintes	2
1.1.3	Loi de comportement ou loi constitutive	2
1.1.4	Cas particulier : état de contraintes planes	3
1.1.5	Formules mathématiques	4
1.2	Exercices	6
2	Méthode des éléments finis : approche résistance des matériaux	25
2.1	Rappels : résolution d'un problème stationnaire	25
2.1.1	Partition des degrés de liberté	25
2.1.2	Calcul des déplacements inconnus	26
2.1.3	Calcul des réactions d'appui	26
2.2	Poutre soumise à un effort normal	27
2.2.1	Rappels	27
2.2.2	Exercices	28
2.3	Treillis plans à nœuds articulés	44
2.3.1	Rappels	44
2.3.2	Exercices	45
2.4	Poutre soumise à un moment de torsion	54
2.4.1	Rappels	54
2.4.2	Exercices	55
2.5	Flexion des poutres à plan moyen : modèle de Bernoulli	58
2.5.1	Rappels : flexion dans le plan $\{xy\}$	58
2.5.2	Exercices	60
3	Méthodes énergétiques : poutres	83
3.1	Rappels	83
3.1.1	Expression de l'énergie de déformation en fonction des forces appliquées : formule de Clapeyron	83
3.1.2	Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	83
3.1.3	Théorème de Castigliano	83
3.1.4	Théorème de Ménabréa	84
3.1.5	Énergie de déformation d'une poutre	84
3.1.6	Formules mathématiques utiles	84
3.2	Exercices	85

4	Méthode des éléments finis	121
4.1	Rappels	121
4.1.1	Énergie de déformation	121
4.1.2	Énergie cinétique	122
4.1.3	Énergie potentielle et éléments finis	123
4.1.4	Modes propres	123
4.2	Exercices	124
4.2.1	Assemblage	124
4.2.2	Élément de poutre droite soumis à un effort normal	126
4.2.3	Exercice : mise en équation	129
4.2.4	Exercice : mise en équation	131
4.2.5	Exercice : contraintes et énergie de déformation	132
4.2.6	Exercice : contraintes et énergie de déformation	134
4.2.7	Élément de poutre droite soumis à un effort normal	137
4.2.8	Exercice : modes propres	140
4.2.9	Élément fini de torsion	143
4.2.10	Élément fini de flexion : modèle de Bernoulli	144
4.2.11	Exercice : élasticité plane	148

Chapitre 1

Élasticité

1.1 Rappels

Les déplacements et les déformations sont petits.

1.1.1 Déplacements et déformations

- Vecteur déplacement :

$$\vec{u} = \overrightarrow{M_0 M} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (1.1.1)$$

- Tenseur des déformations :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad , \quad [\varepsilon]^T = [\varepsilon] \quad (1.1.2)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.1.3a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.1.3b)$$

- Allongement unitaire en M dans la direction $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n}) &= \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} \\ &= n_x^2 \varepsilon_{xx} + n_y^2 \varepsilon_{yy} + n_z^2 \varepsilon_{zz} + n_x n_y \gamma_{xy} + n_x n_z \gamma_{xz} + n_y n_z \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

- Glissement en M dans les directions orthogonales $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$:

$$\gamma(M, \vec{n}_a, \vec{n}_b) = 2 \{n_b\}^T [\varepsilon(M)] \{n_a\} \quad , \quad \{n_b\}^T \{n_a\} = 0 \quad (1.1.5)$$

- Variation relative de volume :

$$\varepsilon_V(M) = \text{tr} [\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (1.1.6)$$

1.1.2 Contraintes

- Vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (1.1.7a)$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \quad , \quad \|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2 \quad (1.1.7b)$$

Soit $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$ un vecteur unitaire en M . Le vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M est donné par la formule de Cauchy :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad , \quad \{T\} = [\sigma(M)] \{n\} \quad (1.1.8)$$

où $[\sigma(M)]$ est le tenseur des contraintes en M .

Le tenseur des contraintes est symétrique :

$$[\sigma] = [\sigma]^T \quad \text{soit} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (1.1.9)$$

La contrainte normale sur la facette $\vec{n}$ est :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n\}^T [\sigma] \{n\} \\ &= n_x^2 \sigma_{xx} + n_y^2 \sigma_{yy} + n_z^2 \sigma_{zz} + 2 n_x n_y \sigma_{xy} + 2 n_x n_z \sigma_{xz} + 2 n_y n_z \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

- Soient σ_1 , σ_2 et σ_3 les trois contraintes principales en un point M d'un solide. Les critères de Rankine, Von Mises et de Tresca s'écrivent :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E \quad (1.1.11a)$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq \sigma_E \quad (1.1.11b)$$

$$\sigma_T = 2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E \quad (1.1.11c)$$

1.1.3 Loi de comportement ou loi constitutive

Si le matériau est isotrope, la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \end{aligned} \quad (1.1.12a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.1.12b)$$

où E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

1.1.4 Cas particulier : état de contraintes planes

Le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.13)$$

d'où l'expression du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1.14)$$

et de la loi de comportement :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad , \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad , \quad \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Les contraintes et les déformations principales sont :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad (1.1.16)$$

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \gamma_{xy}^2} \quad , \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} \quad (1.1.17)$$

Les directions principales sont :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \quad (1.1.18)$$

Les critères de Rankine, Von Mises et de Tresca se réduisent à :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_E \quad (1.1.19a)$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_E \quad (1.1.19b)$$

$$\sigma_T = 2 \tau_{\max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_E \quad (1.1.19c)$$

L'allongement unitaire en M dans la direction $\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix}$ se réduit à :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^T [\varepsilon(M)] \{n\} = n_x^2 \varepsilon_{xx} + n_y^2 \varepsilon_{yy} + n_x n_y \gamma_{xy} \quad (1.1.20)$$

1.1.5 Formules mathématiques

- Valeurs et vecteurs propres d'une matrice symétrique de dimension deux à coefficients réels :

Considérons la matrice symétrique $[S]$:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \quad , \quad ([S]^T = [S]) \quad (1.1.21)$$

Les valeurs propres $S_{n=1,2}$ et les vecteurs propres $\{n\}$ sont les solutions de l'équation :

$$[S]\{n\} = S_n\{n\} \quad , \quad \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = S_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad (1.1.22)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} S_{xx} - S_n & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} - S_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.1.23)$$

Cette équation n'a de solution autre que la solution triviale $n_x = n_y = 0$ que si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} S_{xx} - S_n & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} - S_n \end{bmatrix} = 0 \quad (1.1.24)$$

d'où l'équation caractéristique :

$$S_n^2 - \underbrace{(S_{xx} + S_{yy})}_{\text{tr}[S]=S_1+S_2} S_n + \underbrace{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2}_{\det[S]=S_1 S_2} = 0 \quad (1.1.25)$$

et les valeurs propres :

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4 S_{xy}^2} \quad (1.1.26)$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (1.1.27)$$

avec :

$$\tan \theta_1 = \frac{S_1 - S_{xx}}{S_{xy}} \quad , \quad \tan \theta_2 = \frac{S_2 - S_{xx}}{S_{xy}} \quad (1.1.28)$$

Remarque : les deux directions principales sont orthogonales :

$$|\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tan 2\theta_1 = \tan 2\theta_2 = \frac{2 S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \quad , \quad \tan \theta_1 \tan \theta_2 = -1 \quad (1.1.29)$$

- Déterminant d'une matrice carrée symétrique de dimension 3 :

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \\ &= S_{11} \det \begin{bmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} - S_{21} \det \begin{bmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} + S_{31} \det \begin{bmatrix} S_{12} & S_{13} \\ S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \\ &= S_{11} S_{22} S_{33} - S_{11} S_{23}^2 - S_{33} S_{12}^2 - S_{22} S_{13}^2 + 2 S_{12} S_{13} S_{23} \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

– Formules trigonométriques :

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad , \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi \quad , \quad \sin(-\varphi) = -\sin \varphi \quad (1.1.31)$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \quad (1.1.32)$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \quad (1.1.33)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \quad , \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \quad , \quad \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2} \quad (1.1.34)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi \quad (1.1.35)$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.1.36)$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.1.37)$$

– Si x et y sont petits devant l'unité :

$$|x| \ll 1 \quad , \quad |y| \ll 1 \quad (1.1.38a)$$

on a les relations :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} \quad , \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x \quad , \quad (1+x)(1+y) \simeq 1 + x + y \quad (1.1.38b)$$

$$\sin x \simeq x \quad , \quad \cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2} \quad , \quad \tan x \simeq x \quad (1.1.38c)$$

1.2 Exercices

ELA_1 : vecteur contrainte sur une facette

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.
2. Soit le vecteur unitaire $\vec{n}$ de composantes :

$$\{n\} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Sur la facette $\vec{n}$:

- (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.
- (b) Calculer la contrainte normale σ_n .
- (c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis le module τ_n du cisaillement.

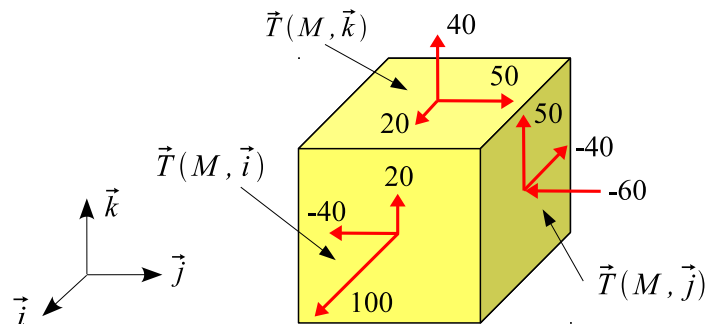
Solution

Représentation graphique des composantes du tenseur des contraintes

Les composantes en MPa du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

sont représentées sur la figure ci-dessous.



Facette $\vec{n}$

Les composantes du vecteur contrainte sont (formule de Cauchy : $\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \{n\}$) :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 60 \\ -60 \\ 200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -20 \\ 66.67 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

On en déduit la contrainte normale ($\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$) :

$$\sigma_n = \frac{1}{9}(60 - 120 + 400) = \frac{340}{9} = 37.78 \text{ MPa}$$

les composantes du vecteur cisaillement ($\vec{\tau}_n = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$) :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 60 \\ -60 \\ 200 \end{Bmatrix} - \frac{340}{9} \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.41 \\ -45.19 \\ 41.48 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

et le module du cisaillement :

$$\tau_n = \|\vec{\tau}_n\| = \sqrt{7.41^2 + (-45.19)^2 + 41.48^2} = 61.78 \text{ MPa}$$

Programme Scilab 5.3.1

```
// vecteur contrainte sur une facette

// tenseur des contraintes dans le repère {xyz}
sigma=[100,-40,20;-40,-60,50;20,50,40]

// facette {n}
n=[1/3;2/3;2/3]

T=sigma*n           // vecteur contrainte : formule de Cauchy
sigma_n=n'*T        // contrainte normale
tau_n=T-sigma_n*n   // vecteur cisaillement
norm(tau_n)         // module du cisaillement
```

ELA_2 : état de contrainte en un point

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.
2. Soit le vecteur unitaire $\vec{n}$ de composantes :

$$\{n\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sur la facette $\vec{n}$:

- (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.
- (b) Calculer la contrainte normale σ_n .
- (c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis le module τ_n du cisaillement.
- (d) Faire un dessin qui montre la facette, le vecteur contrainte, la contrainte normale et le vecteur cisaillement.

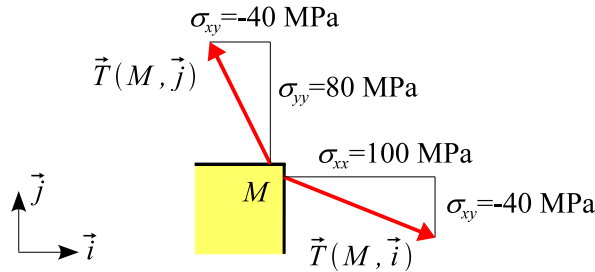
3. Calculer les contraintes et les directions principales.
4. Faire un dessin qui montre la signification physique des contraintes et des directions principales.
5. Calculer les contraintes équivalentes de Von Mises et Tresca.

Solution

Les composantes en MPa du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\text{composantes sur } \begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \begin{bmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont représentées sur la figure ci-dessous.



Facette $\vec{n}$

Les composantes du vecteur contrainte sont (formule de Cauchy : $\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \{n\}$) :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 120 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.94 \\ 53.67 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

On en déduit la contrainte normale ($\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$) :

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{1 \quad 2 \quad 0\} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 120 \\ 0 \end{Bmatrix} = 52.00 \text{ MPa}$$

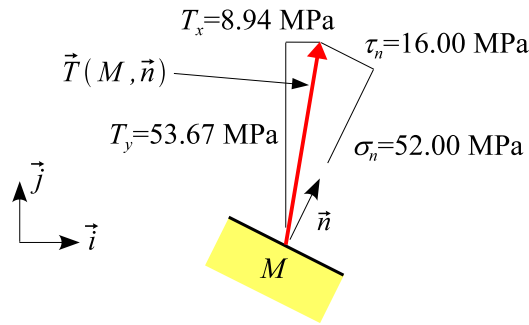
le vecteur cisaillement ($\vec{\tau}_n = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$) :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 20 \\ 120 \\ 0 \end{Bmatrix} - 52 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} -32 \\ 16 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -14.31 \\ 7.16 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

et le module du cisaillement :

$$\tau_n = \|\vec{\tau}_n\| = \sqrt{\frac{1}{5} (32^2 + 16^2)} = 16.00 \text{ MPa}$$

Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$, la contrainte normale σ_n et le cisaillement τ_n sont représentées sur la figure ci-dessous.



Contraintes et directions principales

L'axe $\vec{k}$ est direction principale :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont les solutions de l'équation ($\det([\sigma] - \sigma_n [I]) = 0$) :

$$\det \begin{bmatrix} 100 - \sigma_n & -40 \\ -40 & 80 - \sigma_n \end{bmatrix} = (100 - \sigma_n)(80 - \sigma_n) - (-40)^2 = \sigma_n^2 - 180\sigma_n + 6400 = 0$$

d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{180}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{180^2 - 4 \times 6400}$$

$$\sigma_1 = 131.23 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_2 = 48.77 \text{ MPa}$$

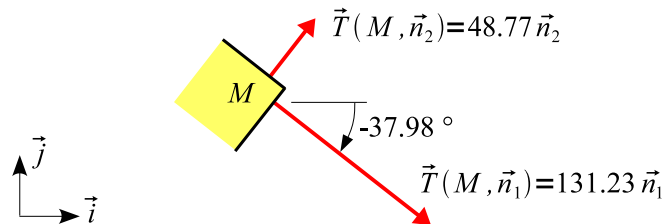
La position angulaire des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ est définie par :

$$\tan \theta_1 = \frac{131.23 - 100}{-40} \quad , \quad \tan \theta_2 = \frac{48.77 - 100}{-40}$$

d'où :

$$\theta_1 = -37.98^\circ \quad , \quad \theta_2 = 52.02^\circ$$

Les contraintes et directions principales sont représentées sur la figure ci-dessous.



Dans le repère principal, le tenseur des contraintes s'écrit :

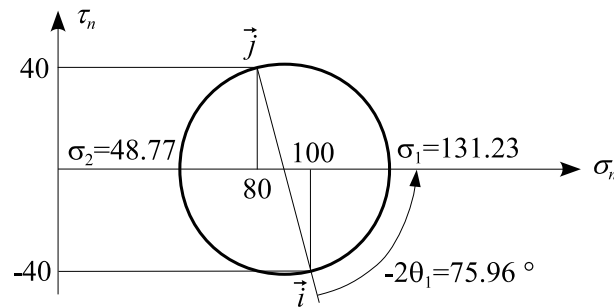
$$[\sigma(M)]_{\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} 131.23 & 0 & 0 \\ 0 & 48.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Les contraintes de Tresca et de Von Mises sont :

$$\sigma_T = \max(|131.23 - 48.77|, |131.23 - 0|, |48.77 - 0|) = 131.23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} ((131.23 - 48.77)^2 + (131.23 - 0)^2 + (48.77 - 0)^2)} = 114.89 \text{ MPa}$$

Remarque : calcul des contraintes et des directions principales à l'aide du cercle de Mohr.



Programme Scilab 5.3.1

```
sxx=100
syy=80
sxy=-40

// tenseur des contraintes dans le repère {xyz}
sigma=[sxx , sxy , 0 ; sxy , syy , 0 ; 0 , 0 , 0]

// facette {n}
n=[1/sqrt(5); 2/sqrt(5); 0]
T=sigma*n // vecteur contrainte : formule de Cauchy
sigma_n=n'*T // contrainte normale
tau_n=T-sigma_n*n // vecteur cisaillement
norm(tau_n) // module du cisaillement

// contraintes principales
d=0.5*(sxx+syy);
r=0.5*sqrt((sxx-syy)^2+4*sxy^2);
sig1=d+r
sig2=d-r
sig3=0

// angles en degrés des directions principales avec l'axe x
t1=atan((sig1-sxx)/sxy)*180/%pi
t2=atan((sig2-sxx)/sxy)*180/%pi

// contraintes de Von Mises et Tresca
Von_Mises=sqrt(sig1^2+sig2^2-sig1*sig2)
Tresca=max(sig1, sig2, 0)-min(sig1, sig2, 0)
```

ELA_3 : contraintes et directions principales

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

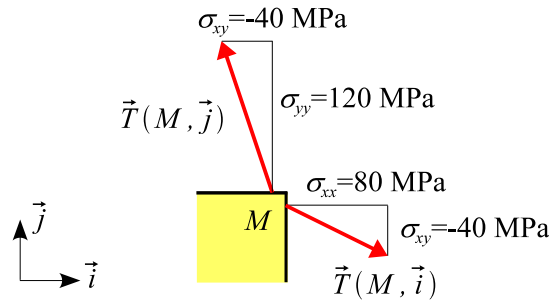
$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 80 & -40 & 0 \\ -40 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.
2. Calculer les contraintes principales et les directions principales.

3. Faire un dessin qui montre la signification physique des contraintes et des directions principales.
4. Calculer les contraintes équivalentes de Von Mises et Tresca.

Solution

Les composantes du tenseur des contraintes sont représentées sur la figure ci-dessous.



L'axe $\vec{k}$ est direction principale :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont les solutions de l'équation ($\det([\sigma] - \sigma_n [\mathbf{I}]) = 0$) :

$$\det \begin{bmatrix} 80 - \sigma_n & -40 \\ -40 & 120 - \sigma_n \end{bmatrix} = (80 - \sigma_n)(120 - \sigma_n) - (-40)^2 = \sigma_n^2 - 200\sigma_n + 8000 = 0$$

d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{200}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{200^2 - 4 \times 8000}$$

$$\sigma_1 = 144.72 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_2 = 55.28 \text{ MPa}$$

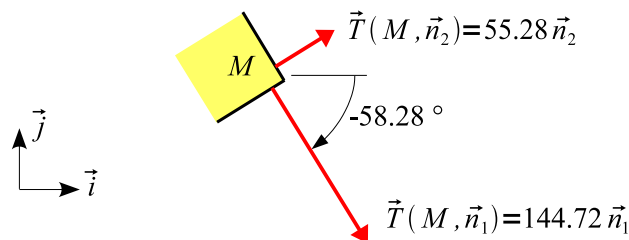
La position angulaire des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ est définie par :

$$\tan \theta_1 = \frac{144.72 - 80}{-40} \quad , \quad \tan \theta_2 = \frac{55.28 - 80}{-40}$$

d'où :

$$\theta_1 = -58.28^\circ \quad , \quad \theta_2 = 31.72^\circ$$

Les contraintes et directions principales sont représentées sur la figure ci-dessous.



Dans le repère principal, le tenseur des contraintes s'écrit :

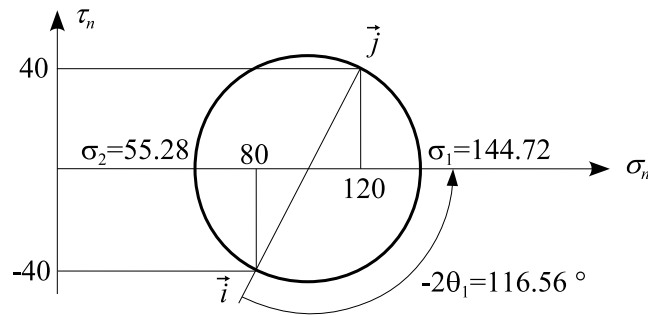
$$[\sigma(M)]_{\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} 144.72 & 0 & 0 \\ 0 & 55.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Les contraintes équivalentes de Tresca et de Von Mises sont :

$$\sigma_T = \max(|144.72 - 55.28|, |144.72 - 0|, |55.28 - 0|) = 144.72 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} ((144.72 - 55.28)^2 + (144.72 - 0)^2 + (55.28 - 0)^2)} = 126.49 \text{ MPa}$$

Remarque : calcul des contraintes et des directions principales à l'aide du cercle de Mohr.



Programme Scilab 5.3.1

// contraintes planes : contraintes et directions principales

```
sxx=80
syy=120
sxy=-40
```

// tenseur des contraintes

```
sigma=[sxx , sxy , 0 ; sxy , syy , 0 ; 0 , 0 , 0]
```

// contraintes principales

```
d=0.5*(sxx+syy);
r=0.5*sqrt((sxx-syy)^2+4*sxy^2);
sig1=d+r
sig2=d-r
sig3=0
```

// angles en degrés des directions principales avec l'axe x

```
t1=atan((sig1-sxx)/sxy)*180/%pi
t2=atan((sig2-sxx)/sxy)*180/%pi
```

// contraintes de Von Mises et Tresca

```
Von_Mises=sqrt(sig1^2+sig2^2-sig1*sig2)
Tresca=max(sig1 , sig2 , 0)-min(sig1 , sig2 , 0)
```

ELA_4 : contraintes et directions principales

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour expression :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les contraintes et les directions principales.

Solution

Les contraintes principales σ_n sont les solutions de l'équation :

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma_n & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma_n & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n (\sigma_n^2 - \tau^2) - \tau (-\tau \sigma_n - \tau^2) + \tau (\tau^2 + \sigma_n \tau) \\ = -\sigma_n^3 + 3 \sigma_n \tau^2 + 2 \tau^2 = 0$$

d'où :

$$\sigma_1 = 2\tau \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$$

La direction principale $\vec{n}_1$ est solution de l'équation :

$$\begin{bmatrix} -\sigma_1 = -2\tau & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma_1 = -2\tau & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma_1 = -2\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\{n_1\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Les directions principales $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont les solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} -\sigma_2 = -\sigma_3 = \tau & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma_2 = -\sigma_3 = \tau & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma_2 = -\sigma_3 = \tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\{n_2\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_3\} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Remarque : tout vecteur $\vec{n} = a\vec{n}_2 + b\vec{n}_3$ avec $a^2 + b^2 = 1$ est direction principale associée à la contrainte principale $-\tau$.

La contrainte de Von Mises et la contrainte de Tresca sont égales à :

$$\sigma_{VM} = \sigma_T = 3|\tau|$$

ELA_5 : déformations autour d'un point

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des déformations est égal à :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Un tel état de déformation est dit état de déformation plane par rapport à l'axe $\vec{k}$.

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des déformations.

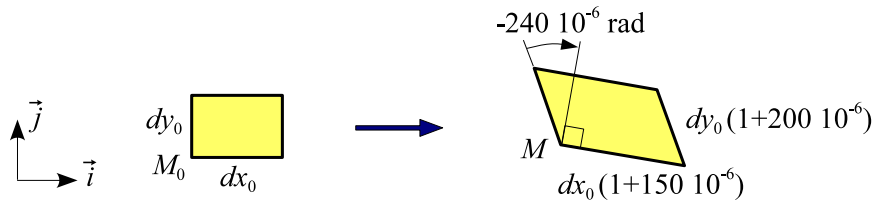
2. Soient les deux directions orthogonales $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$:

$$\{n_a\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{n_b\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 0$$

- Calculer l'allongement unitaire dans les directions $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$ et le glissement dans ces deux directions.
 - Faire un dessin qui montre la signification physique de ces déformations.
 - Expression du tenseur des déformations dans le repère $\{\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{k}\}$.
- Calculer les déformations et les directions principales. Faire un dessin qui montre la signification physique des déformations principales.
 - Calculer la variation relative de volume ε_V .

Solution

Les composantes du tenseur des déformations dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont représentées sur la figure ci-dessous.



Déformations dans les directions $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$

L'allongement unitaire dans la direction $\vec{n}_a$ est :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n}_a) &= \{n_a\}^T [\varepsilon(M)] \{n_a\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \{1 \quad -2 \quad 0\} \begin{bmatrix} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = 286 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

L'allongement unitaire dans la direction $\vec{n}_b$ est :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \vec{n}_b) &= \{n_b\}^T [\varepsilon(M)] \{n_b\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \{2 \quad 1 \quad 0\} \begin{bmatrix} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 64 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

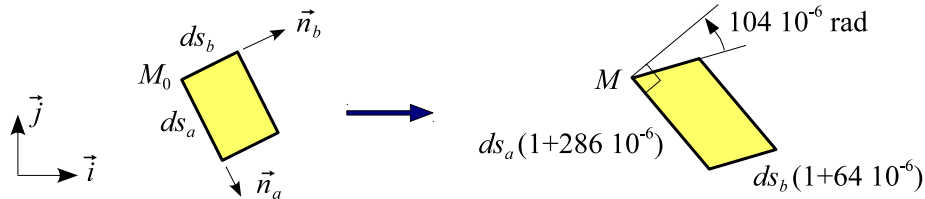
Le glissement dans les deux directions orthogonales $\vec{n}_a$ et $\vec{n}_b$ est :

$$\begin{aligned} \gamma(M, \vec{n}_a, \vec{n}_b) &= 2 \{n_b\}^T [\varepsilon(M)] \{n_a\} \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{5}} \{2 \quad 1 \quad 0\} \begin{bmatrix} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = 104 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Dans le repère $\{\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{k}\}$, le tenseur des déformations s'écrit :

$$[\varepsilon(M)]_{\{\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{k}\}} = \begin{bmatrix} 286 & 52 & 0 \\ 52 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Les composantes du tenseur des déformations dans le repère $\{\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{k}\}$ sont représentées sur la figure ci-dessous.



Déformations et directions principales

L'axe $\vec{k}$ est direction principale :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \varepsilon_3 = 0$$

Les déformations principales ε_1 et ε_2 sont les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 150 & -120 \\ -120 & 200 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

d'où :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \right\} = \left(\frac{150 + 200}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(150 - 200)^2 + 4 \times (-120)^2} \right) 10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = 298 \cdot 10^{-6} \quad , \quad \varepsilon_2 = 52 \cdot 10^{-6}$$

La position angulaire des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ est définie par :

$$\tan \theta_1 = \frac{298 - 150}{-120} \quad , \quad \tan \theta_2 = \frac{52 - 150}{-120}$$

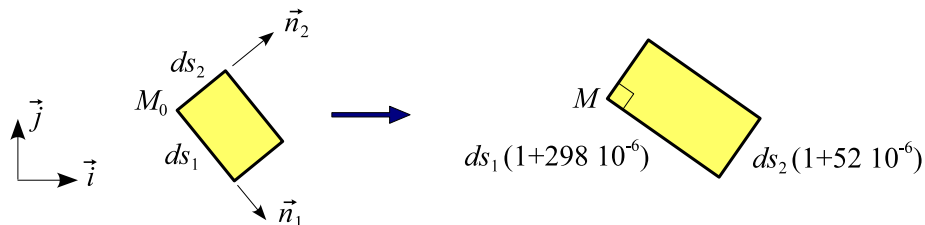
d'où :

$$\theta_1 = -50.88^\circ \quad , \quad \theta_2 = 39.12^\circ$$

Dans le repère principal, le tenseur des déformations s'écrit :

$$[\varepsilon(M)]_{\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} 298 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Les composantes du tenseur des déformations dans le repère principal sont représentées sur la figure ci-dessous.



La variation relative de volume est :

$$\varepsilon_V(M) = \text{tr} [\varepsilon(M)] = (150 + 200 + 0) 10^{-6} = (286 + 64 + 0) 10^{-6} = (298 + 52 + 0) 10^{-6} = 350 \cdot 10^{-6}$$

Programme Scilab 5.3.1

```

// déformations autour d'un point

// déformations *E6 dans le repère {xyz}
exx=150
eyy=200
gxy=-240

// tenseur des déformations dans le repère {xyz}
eps=[exx,gxy/2,0;gxy/2,eyy,0;0,0,0]

// directions orthogonales {n} et {t}
n=[1/sqrt(5);-2/sqrt(5);0]
t=[-n(2);n(1);0]

// allongements unitaires dans les directions {n} et {t}
enn=n'*eps*n
ett=t'*eps*t

// glissement des directions orthogonales {n} et {t}
gnt=2*t'*eps*n

// tenseur des déformations dans le repère {ntz}
eps_ntz=[enn,gnt/2,0;gnt/2,ett,0;0,0,0]

// déformations principales
d=(exx+eyy)/2;
r=sqrt((exx-eyy)^2+gxy^2)/2;
eps1=d+r
eps2=d-r

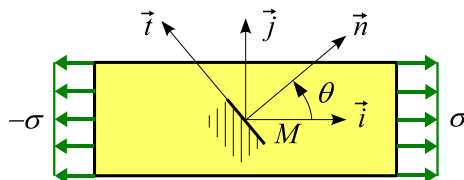
// directions principales (angles en degrés)
an1=atan(2*(eps1-exx)/gxy)*180/%pi
an2=atan(2*(eps2-exx)/gxy)*180/%pi

// déformation volumique
eps_V=trace(eps)

```

ELA_6 : état de contrainte uniaxial

Une poutre de section droite constante est soumise à une contrainte de traction σ .



1. Donner l'expression du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
2. Considérons la facette $\vec{n}$ en M .
 - (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte sur cette facette.
 - (b) Calculer la valeur du cisaillement maximal.

- (c) Calculer la valeur de θ pour laquelle l'allongement unitaire est nul.
Application numérique : $\nu = 0.3$.

3. Calculer la variation relative de volume de la barre $\frac{dV}{V}$ en fonction de E , ν et σ .

Solution

Dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, les composantes du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad [\varepsilon] = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

Les composantes des vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ est égal à (formule de Cauchy) :

$$\{T\} = [\sigma] \{n\} = \begin{Bmatrix} \sigma \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où l'expression du cisaillement :

$$\tau_n = \{t\}^T \{T\} = -\sigma \cos \theta \sin \theta = -\frac{1}{2} \sigma \sin(2\theta)$$

Le cisaillement est maximal pour θ tel que :

$$\frac{d\tau_n}{d\theta} = 0 \quad \text{soit} \quad \cos(2\theta) = 0$$

d'où :

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad \tau_{\max} = \frac{|\sigma|}{2}$$

L'allongement unitaire dans la direction $\vec{n}$ est :

$$\epsilon_{nn} = \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} = \frac{\sigma}{E} (\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta)$$

et s'annule pour θ tel que :

$$\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta = 0 \quad \text{soit} \quad \tan^2 \theta = \frac{1}{\nu}$$

Pour $\nu = 0.3$, on obtient $\theta = 61.29^\circ$.

La déformation volumique est :

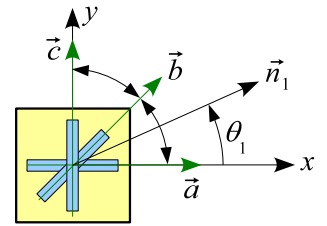
$$\varepsilon_V = \text{tr} [\varepsilon] = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma$$

ELA_7 : rosette à 45 degrés

La rosette à 45 degrés représentée sur la figure ci-contre est collée sur un réservoir au point critique.

Les caractéristiques du matériau sont :

- module de Young : $E = 210000 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson : $\nu = 0.27$
- limite élastique : $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$



On mesure :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = -100 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_b = -450 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_c = 400 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

1. Calculer les composantes du tenseur des déformations.
2. En déduire les composantes du tenseur des contraintes.
3. Calculer ε_{zz} .
4. Calculer les contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 .
5. Calculer les déformations principales ε_1 , ε_2 et ε_3 .
6. Calculer la position angulaire θ_1 de la direction principale $\vec{n}_1$ avec la jauge $\vec{a}$.
7. La pression à l'intérieur du réservoir est égale à $p = 50 \text{ MPa}$. Calculer la pression maximale admissible $p_{\max}$ (on utilisera les critères de Tresca et Von Mises).

Solution

En M , l'état de contrainte est plan par rapport à l'axe $\vec{k}$. Les allongements unitaires ε_a , ε_b et ε_c s'écrivent en fonction des composantes du tenseur des déformations :

jauge a :

$$\{n_a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_a = \varepsilon(M, \vec{n}_a) = \varepsilon_{xx}$$

jauge b :

$$\{n_b\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_b = \varepsilon(M, \vec{n}_b) = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

jauge c :

$$\{n_c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_c = \varepsilon(M, \vec{n}_c) = \varepsilon_{yy}$$

On en déduit :

– les composantes non nulles du tenseur des déformations :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a = -100 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_c = 400 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c = 2 \times (-450 \cdot 10^{-6}) - (-100 \cdot 10^{-6}) - 400 \cdot 10^{-6} = -1200 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = -\frac{0.27}{1-0.27}(-100 \cdot 10^{-6} + 400 \cdot 10^{-6}) = -111 \cdot 10^{-6}$$

– les composantes non nulles du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{210000}{1-0.27^2}(-100 + 0.27 \times 400) \cdot 10^{-6} = 1.81 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) = \frac{210000}{1-0.27^2}(400 + 0.27 \times (-100)) \cdot 10^{-6} = 84.49 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{210000}{2(1+0.27)}(-1200 \cdot 10^{-6}) = -99.21 \text{ MPa}$$

Les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} -100 & -600 & 0 \\ -600 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & -111 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad , \quad [\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 1.81 & -99.21 & 0 \\ -99.21 & 84.49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

L'axe $\vec{k}$ est direction principale :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad , \quad \varepsilon_3 = -111 \cdot 10^{-6}$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont :

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \\ &= \frac{1.81 + 84.49}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1.81 - 84.49)^2 + 4(-99.21)^2} \end{aligned}$$

soit :

$$\sigma_1 = 150.63 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_2 = -64.33 \text{ MPa}$$

La position angulaire de la direction principale $\vec{n}_1$ est donnée par l'équation :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{150.63 - 1.81}{-99.21}$$

d'où :

$$\theta_1 = -56.31^\circ$$

Les déformations principales ε_1 et ε_2 sont :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{210000}(150.63 - 0.27 \times (-64.33)) = 800 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = \frac{1}{210000} (-64.33 - 0.27 \times 150.63) = -500 \cdot 10^{-6}$$

Les contraintes de Tresca et de Von Mises sont :

$$\sigma_T = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) = 150.63 - (-64.33) = 214.96 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{150.63^2 + (-64.33)^2 - 150.63 \times (-64.33)} = 191.10 \text{ MPa}$$

La pression maximale admissible est donc :

$$\text{critère de Tresca : } p_{\max} = p \frac{\sigma_E}{\sigma_T} = 50 \frac{300}{214.96} = 69.78 \text{ MPa}$$

$$\text{critère de Von Mises : } p_{\max} = p \frac{\sigma_E}{\sigma_{VM}} = 50 \frac{300}{191.10} = 78.49 \text{ MPa}$$

Programme Scilab 5.3.1

Le programme se trouve dans le cours d'élasticité.

ELA_8 : rosette à 120 degrés

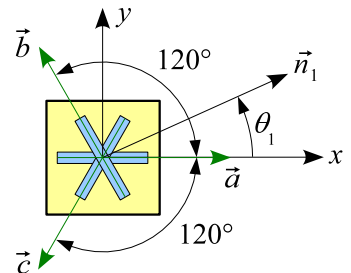
La rosette à 120 degrés représentée sur la figure ci-contre est collée en un point M d'une structure.

Les caractéristiques du matériau sont :

- module de Young : $E = 210000 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

On mesure :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = -900 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_b = 400 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_c = -50 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$



1. Calculer les composantes du tenseur des déformations.
2. En déduire les composantes du tenseur des contraintes.
3. Calculer les contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 .
4. Calculer les déformations principales ε_1 , ε_2 et ε_3 .
5. Calculer la position angulaire θ_1 de la direction principale $\vec{n}_1$ avec la jauge $\vec{a}$.
6. Calculer la contrainte équivalente de Von Mises et la contrainte équivalente de Tresca.

Solution

En M , l'état de contrainte est plan par rapport à l'axe $\vec{k}$. Les allongements unitaires ε_a , ε_b et ε_c s'écrivent en fonction des composantes du tenseur des déformations :

jauge a :

$$\{n_a\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \varepsilon_a = \varepsilon(M, \vec{n}_a) = \varepsilon_{xx}$$

jauge b :

$$\{n_b\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \varepsilon_b = \varepsilon(M, \vec{n}_b) = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$$

jauge c :

$$\{n_c\} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \varepsilon_c = \varepsilon(M, \vec{n}_c) = \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$$

On en déduit :

– les composantes non nulles du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_a = -900 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{3} (2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a) = 533 \cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_c - \varepsilon_b) = -520 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 157 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

– les composantes non nulles du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{210000}{1-0.3^2} (-900 + 0.3 \times 533) \cdot 10^{-6} = -170.77 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) = \frac{210000}{1-0.3^2} (533 + 0.3 \times (-900)) \cdot 10^{-6} = 60.77 \text{ MPa} \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{210000}{2(1+0.3)} (-520 \cdot 10^{-6}) = -41.97 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} -900 & -260 & 0 \\ -260 & 533 & 0 \\ 0 & 0 & 157 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad , \quad [\sigma(M)] = \begin{bmatrix} -170.77 & -41.97 & 0 \\ -41.97 & 60.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

L'axe $\vec{k}$ est direction principale :

$$\vec{n}_3 = \vec{k} \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad , \quad \varepsilon_3 = 157 \cdot 10^{-6}$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$= \frac{-170.77 + 60.77}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-170.77 - 60.77)^2 + 4(-41.97)^2}$$

soit :

$$\sigma_1 = 68.14 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_2 = -178.14 \text{ MPa}$$

La position angulaire de la direction principale $\vec{n}_1$ est donnée par l'équation :

$$\tan \theta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{68.14 - (-170.77)}{-41.97}$$

d'où :

$$\theta_1 = -80.04^\circ$$

Les déformations principales ε_1 et ε_2 sont :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{1}{210000} (68.14 - 0.27 \times (-178.14)) = 579 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = \frac{1}{210000} (-178.14 - 0.27 \times 68.14) = -946 \cdot 10^{-6}$$

Les contraintes de Tresca et de Von Mises sont :

$$\sigma_T = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) = 68.14 - (-178.77) = 246.28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{68.14^2 + (-178.14)^2 - 68.14 \times (-178.14)} = 220.27 \text{ MPa}$$

Programme Scilab 5.3.1

```
// Dépouillement d'une rosette d'extensométrie

// angle de la rosette : 45, 60 ou 120 degrés
phi=120
if phi~=[45,60,120]
    then halt('phi doit être égal à 45, 60 ou 120 degrés')
end

// matériau
E=210000 // module de Young
nu=0.3 // coefficient de Poisson

// allongements unitaires mesurés
epsa=-900E-6
epsb=400E-6
epsc=-50E-6

// calcul des déformations exx , eyy , ezz et gxy
// l'axe x est l'axe de la jauge a
rphi=phi*%pi/180; // angle en radians
c=cos(rphi); s=sin(rphi);
```

```

exx=epsa;
eyy=(epsa*(2*c^2-1)+2*epsb*(1-2*c^2)+epsc)/(2*s^2);
gxy=(epsa*(1-4*c^2)+4*c^2*epsb-epsc)/(2*s*c);
ezz=-nu*(exx+eyy)/(1-nu);

// calcul des contraintes Sxx, Syx et Sxy
c=E/(1-nu^2);
sxx=c*(exx+nu*eyy);
syy=c*(eyy+nu*exx);
G=E/2/(1+nu); // module d'élasticité transversal
sxy=G*gxy;

// tenseur des contraintes
sigma=[sxx , sxy , 0; sxy , syx , 0; 0 , 0 , 0]

// contraintes principales
d=0.5*(sxx+syy);
r=0.5*sqrt((sxx-syy)^2+4*sxy^2);
sig1=d+r
sig2=d-r
sig3=0

// angle en degrés de la direction principale n1 avec la jauge a
t1=atan((sig1-sxx)/sxy)*180/%pi

// tenseur des déformations
epsilon=[exx,1/2*gxy,0;1/2*gxy,eyy,0;0,0,ezz]

// déformations principales
eps1=(sig1-nu*sig2)/E
eps2=(sig2-nu*sig1)/E
eps3=ezz

// déformation volumique dV/V
epsV=trace(epsilon)

// contraintes de Von Mises et Tresca
Von_Mises=sqrt(sig1^2+sig2^2-sig1*sig2)
Tresca=max(sig1 , sig2 , 0)-min(sig1 , sig2 , 0)

// éditions =====

printf( '\n\nRosette_d''extensométrie_à_%3d_degrés\n\n', phi );
printf( 'Module_de_Young:_%8.0f_MPa\n\n', E )
printf( 'Coefficient_de_Poisson:_%5.2f\n\n', nu )
printf( 'Mesures:_epsa=_%5.0f_E-6_,_epsb=_%5.0f_E-6_,_epsc=_%5.0f_E-6\n\n',
        epsa*1E6, epsb*1E6, epsc*1E6 )
printf( 'Déformations_principales:_eps1=_%5.0f_E-6_,_eps2=_%5.0f_E-6_,_eps3=_%5.0f_E-6\n\n',
        eps1*1E6, eps2*1E6, eps3*1E6 )
printf( 'Déformation_volumique:_epsV=_%5.0f_E-6\n\n', epsV*1E6 )
printf( 'Contraintes_principales:_sig1=_%5.2f_MPa_,_sig2=_%5.2f_MPa_,_sig3=_%5.2f_MPa\n\n',
        sig1 , sig2 )
printf( 'Angle_de_la_direction_principale_n1_avec_la_jauge_a:_%5.2f_degrés\n\n',
        t1 )
printf( 'Contraintes_de_Von_Mises=_%5.2f_MPa\n\n', Von_Mises )
printf( 'Contraintes_de_Tresca=_%5.2f_MPa\n\n', Tresca )

```


Chapitre 2

Méthode des éléments finis : approche résistance des matériaux

2.1 Rappels : résolution d'un problème stationnaire

Les équations d'équilibre de la structure s'écrivent :

$$[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\} \quad (2.1.1)$$

où :

$[K]$ est la matrice de rigidité.

$\{U\}$ est le vecteur déplacement.

$\{F_{\text{nod}}\}$ est le vecteur des forces nodales.

$\{F\}$ est le vecteur force équivalent aux charges réparties et aux gradients thermiques.

2.1.1 Partition des degrés de liberté

Ce système d'équations linéaires n'a pas de solution : la matrice de rigidité est une matrice singulière ($\det[K] = 0$). Imposons un certain nombre de déplacements et numérotions les degrés de liberté de façon à obtenir la partition suivante :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} = ? \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} \quad (2.1.2)$$

où :

$\{U_L\}$ est le vecteur des déplacements inconnus.

$\{U_P\}$ celui des déplacements connus (nuls ou non nuls).

Cette partition du vecteur déplacement induit une partition des vecteurs force et de la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} = ? \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\text{nod},L}\} \\ \{F_{\text{nod},P}\} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} \quad (2.1.3)$$

où :

$\{F_L\}$ et $\{F_{\text{nod},L}\}$ sont les vecteurs des forces connues.

$\{F_{\text{nod},P}\}$ est le vecteur des réactions d'appui.

2.1.2 Calcul des déplacements inconnus

Du système d'équations précédent, on déduit :

$$[K_{LL}] \{U_L\} + [K_{LP}] \{U_P\} = \{F_{\text{nod},L}\} + \{F_L\} \quad (2.1.4)$$

d'où :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\} + \{F_L\} - [K_{LP}] \{U_P\} \quad (2.1.5)$$

Le deuxième membre de l'équation ci-dessus est connu. Si le nombre de liaisons est suffisant, la matrice $[K_{LL}]$ n'est pas singulière ($\det[K_{LL}] \neq 0$) et les déplacements inconnus sont :

$$\{U_L\} = [K_{LL}]^{-1} (\{F_{\text{nod},L}\} + \{F_L\} - [K_{LP}] \{U_P\}) \quad (2.1.6)$$

2.1.3 Calcul des réactions d'appui

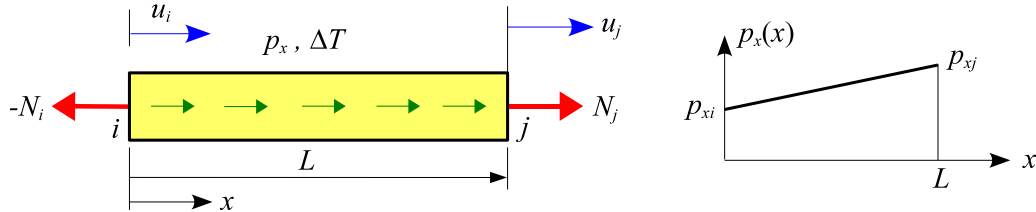
Tous les déplacements étant connus, les réactions d'appui sont calculées à l'aide de l'équation :

$$\{F_{\text{nod},P}\} = [K_{PL}] \{U_L\} + [K_{PP}] \{U_P\} - \{F_P\} \quad (2.1.7)$$

2.2 Poutre soumise à un effort normal

2.2.1 Rappels

Soit un élément de poutre droite $i - j$, d'axe x , de longueur L , de section droite constante, soumis à un effort normal $N(x)$.



A est l'aire de la section droite.

E et α sont respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

L'élément porte sur toute sa longueur une force linéairement répartie d'intensité linéique $(p_x, 0, 0)$ avec :

$$p_x(x) = p_{xi} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + p_{xj} \frac{x}{L} = p_{xi} + (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x}{L} \quad (2.2.1)$$

et subit une variation de température ΔT constante dans l'élément.

u_i et u_j sont les déplacements nodaux.

N_i et N_j sont les efforts normaux dans les sections i et j .

L'intégration de l'équation d'équilibre :

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \quad \text{avec } N(0) = N_i \quad (2.2.2)$$

conduit à l'expression de l'effort normal :

$$N(x) = N_i - p_{xi} x - (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x^2}{2L} \quad (2.2.3)$$

La contrainte normale dans la poutre est égale à :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{N(x)}{A} \quad (2.2.4)$$

L'intégration de la relation de comportement (équation de la déformée) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T \quad \text{avec } u(0) = u_i \quad (2.2.5)$$

conduit à l'expression de la déformée :

$$u(x) = u_i + \frac{1}{EA} \left(N_i x - p_{xi} \frac{x^2}{2} - (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x^3}{6L} \right) + \alpha \Delta T x \quad (2.2.6)$$

Des conditions aux limites $N(L) = N_j$ et $u(L) = u_j$, on déduit :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} - \{f_{th}\} \quad (2.2.7a)$$

avec

$$\{f_{\text{nod}}\} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N_i \\ N_j \end{Bmatrix} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.2.7b)$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \{f\} = \frac{L}{6} \begin{Bmatrix} 2p_{xi} + p_{xj} \\ p_{xi} + 2p_{xj} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{f_{th}\} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.2.7c)$$

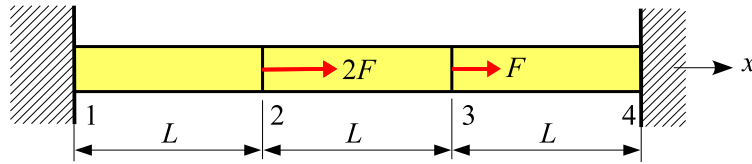
Remarque : l'équilibre de l'élément s'écrit :

$$-N_i + N_j + \frac{L}{2}(p_{xi} + p_{xj}) = 0 \quad (2.2.8)$$

2.2.2 Exercices

MEF_NOR_1

La poutre représentée sur la figure est discrétisée en trois éléments de même longueur L .



Soient E et A respectivement le module d'Young du matériau et l'aire de la section droite.

Les sections 1 et 4 sont encastrées.

La section 2 porte une force d'intensité $2F$ et la section 3 une force d'intensité F .

1. Effectuer l'étude élémentaire.
2. Effectuer l'assemblage.
3. Calculer les déplacements nœuds.
4. Calculer les actions de liaison et vérifier l'équilibre de la structure.

Solution

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1+1 & -1 & \\ & -1 & 1+1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ 2F \\ F \\ F_{4x} = ? \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2F \\ F \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{5}{3} \frac{FL}{EA} \quad , \quad u_3 = \frac{4}{3} \frac{FL}{EA}$$

Les actions de liaisons sont les solutions de l'équation $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

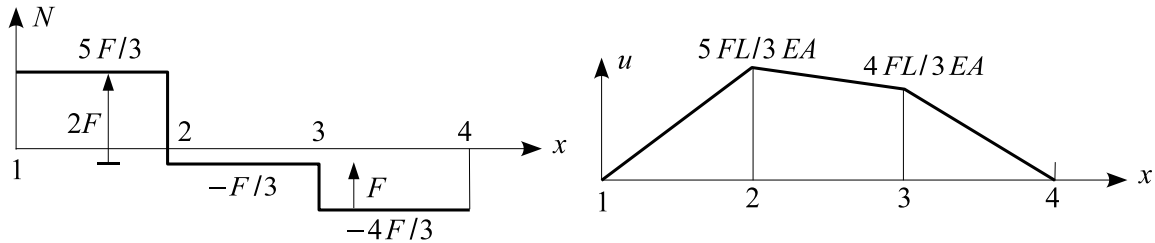
d'où :

$$F_{1x} = -\frac{5}{3} F \quad , \quad F_{4x} = -\frac{4}{3} F$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

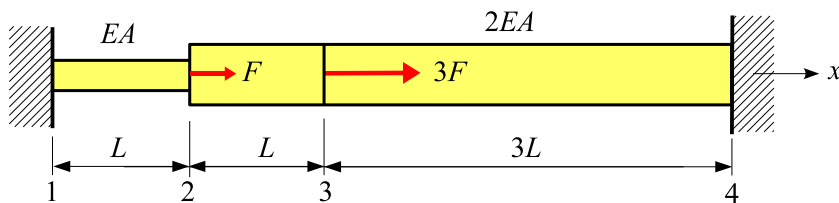
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -\frac{5}{3} F + 2F + F - \frac{4}{3} F = 0$$

L'effort normal $N(x)$ et le champ de déplacements $u(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_2

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soit E le module de Young du matériau. La rigidité linéique est égale à EA entre les nœuds 1 et 2, $2EA$ entre les nœuds 2 et 4.



La poutre est encastée en 1 et 4. Elle est sollicitée au nœud 2 par une force $(F, 0, 0)$ et au nœud 3 par une force $(3F, 0, 0)$ avec $F > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Représentations graphiques : tracer $u(x)$, $N(x)$ et $\sigma_{xx}(x)$

Solution

Les matrices de rigidité élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [k_{2-3}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [k_{3-4}] = \frac{2EA}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

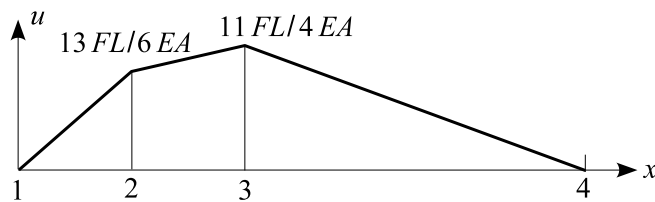
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1+2 & -2 & \\ & -2 & 2+2/3 & -2/3 \\ & & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F \\ 3F \\ F_{4x} = ? \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 3F \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{13}{6} \frac{FL}{EA} \quad , \quad u_3 = \frac{11}{4} \frac{FL}{EA}$$



Les actions de liaisons sont les solutions de l'équation $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & \\ & -2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

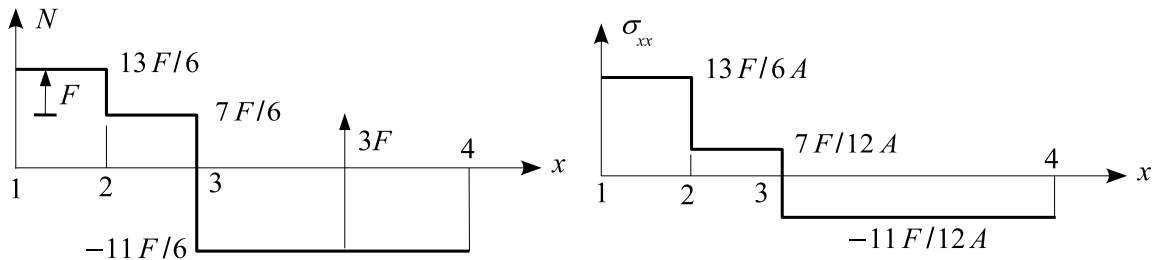
d'où :

$$F_{1x} = -\frac{13}{6} F \quad , \quad F_{4x} = -\frac{11}{6} F$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

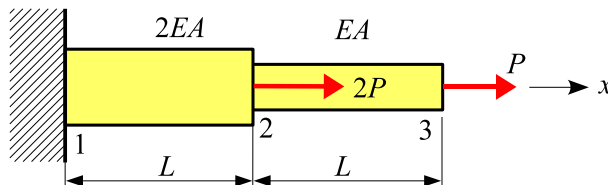
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -\frac{13}{6} F + F + 3F - \frac{11}{6} F = 0$$

L'effort normal $N(x)$ et la contrainte normale $\sigma_{xx}(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_3

La poutre représentée sur la figure est constituée de deux tronçons de même longueur L .



Soit E le module de Young du matériau.

L'aire de la section droite est égale à $2A$ entre les nœuds 1 et 2 et A entre les nœuds 2 et 3.

La section 1 est encastée.

La section 2 porte une force d'intensité $2P$ et la section 3 une force d'intensité P .

1. Calculer les déplacements nœux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœux.
3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$, $\sigma_{xx}(x)$ et $u(x)$.

Solution

Les matrices de rigidité élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nœd}}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x}=? \\ 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nœd},L}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ P \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{3}{2} \frac{PL}{EA}, \quad u_3 = \frac{5}{2} \frac{PL}{EA}$$

La réaction d'appui est solution de $[K_{PL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nœd},P}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{F_{1x}\}$$

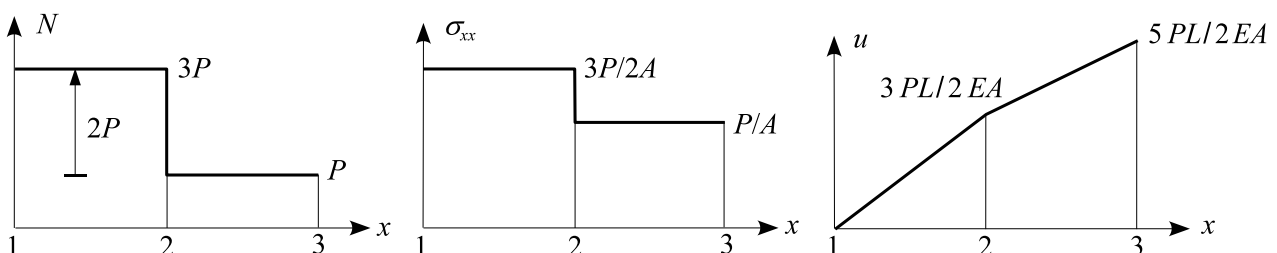
d'où :

$$F_{1x} = -3P$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

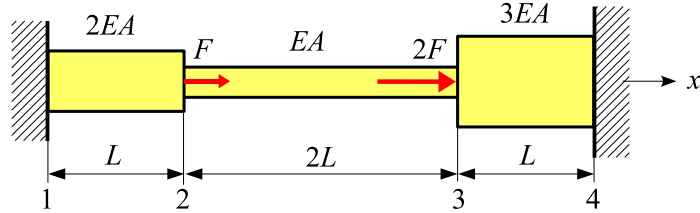
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -3P + 2P + P = 0$$

L'effort normal, la contrainte normale et le champ de déplacements sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_4

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soit E le module de Young du matériau. La rigidité linéique est égale à $2EA$ entre les nœuds 1 et 2, EA entre les nœuds 2 et 3 et à $3EA$ entre les nœuds 3 et 4.



La poutre est encastree en 1 et 4. Elle est sollicitée au nœud 2 par une force $(F, 0, 0)$ et au nœud 3 par une force $(2F, 0, 0)$ avec $F > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer l'effort normal aux deux extrémités.
3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$, $\sigma_{xx}(x)$ et $u(x)$.

Solution

Les matrices de rigidité élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{3-4}] = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

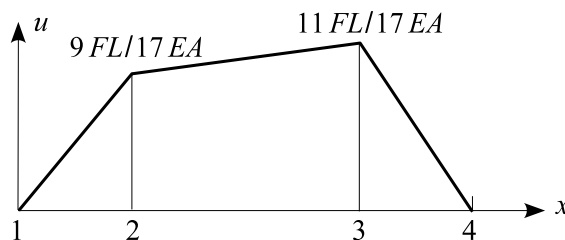
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 + 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 + 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F \\ 2F \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 2F \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{9}{17} \frac{FL}{EA}, \quad u_3 = \frac{11}{17} \frac{FL}{EA}$$



Les actions de liaisons sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -2 & \\ & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

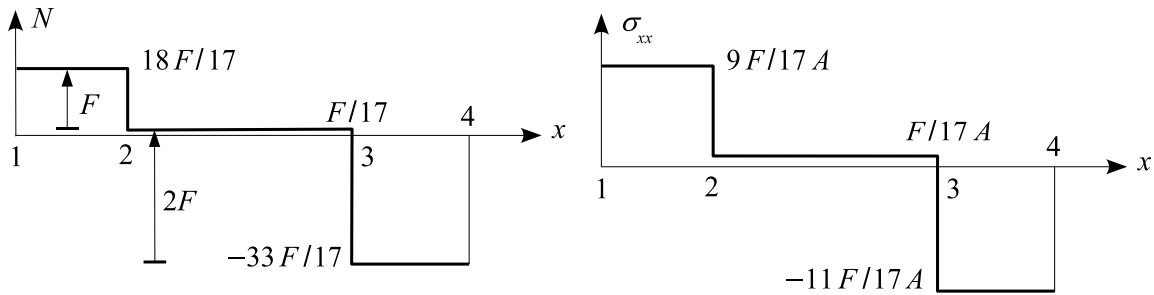
d'où :

$$F_{1x} = -\frac{18}{17} F \quad , \quad F_{4x} = -\frac{33}{17} F$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

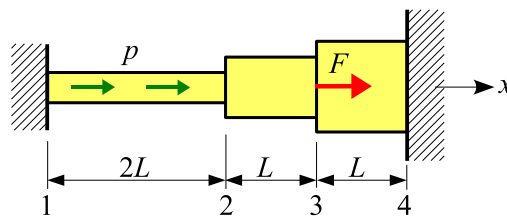
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -\frac{18}{17} F + F + 2F - \frac{33}{17} F = 0$$

L'effort normal $N(x)$ et la contrainte normale $\sigma_{xx}(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_5

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soit E le module de Young du matériau. L'aire de la section droite est égale à A entre les nœuds 1 et 2, $2A$ entre les nœuds 2 et 3 et à $3A$ entre les nœuds 3 et 4. La poutre est encastree en 1 et 4.



La poutre porte entre les nœuds 1 et 2 une force uniformément répartie d'intensité linéique $(p, 0, 0)$ avec $p > 0$ et au nœud 3 une force $(F = 2pL, 0, 0)$.

1. Calculer les déplacements nœdaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœdaux.
3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$, $\sigma_{xx}(x)$ et $u(x)$.

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 + 2 \\ & -2 & 2 + 3 \\ & & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ 0 \\ 2pL \\ F_{4x} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL \\ pL \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaison

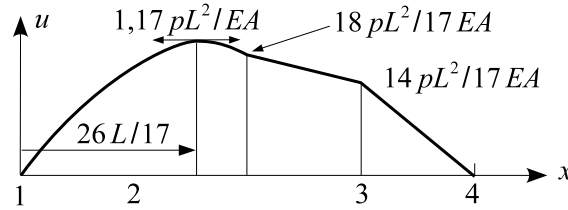
Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\} + \{F_L\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5/2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2pL \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{18}{17} \frac{pL^2}{EA} \quad , \quad u_3 = \frac{14}{17} \frac{pL^2}{EA}$$

Le champ de déplacements est représenté sur la figure ci-dessous.



Les actions de liaisons sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1/2 & \\ & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = -\frac{26}{17} pL \quad , \quad F_{4x} = -\frac{42}{17} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + 2pL = -\frac{26}{17} pL + 0 + 2pL - \frac{42}{17} pL + 2pL = 0$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - pL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{17} \begin{Bmatrix} -26 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

Le déplacement est maximal pour $x = x_m$ tel que $N(x_m) = N_1 - px_m = 0$, d'où :

$$x_m = \frac{26}{17} L = 1.52 L \quad , \quad u(x_m) = \frac{676}{578} \frac{pL^2}{EA} = 1.17 \frac{pL^2}{EA}$$

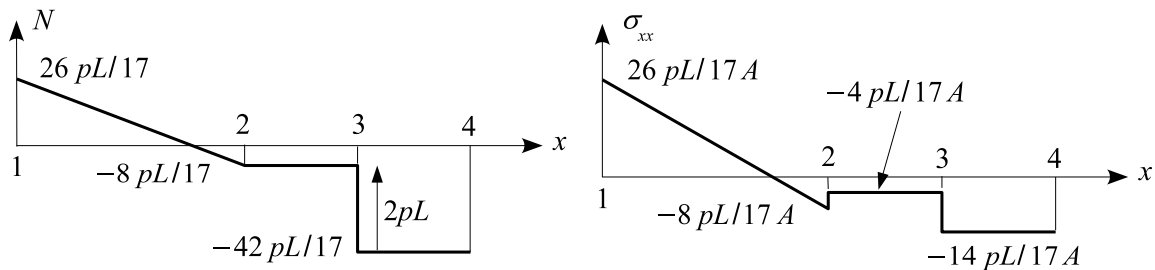
– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{17} \begin{Bmatrix} 8 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

– élément 3-4 :

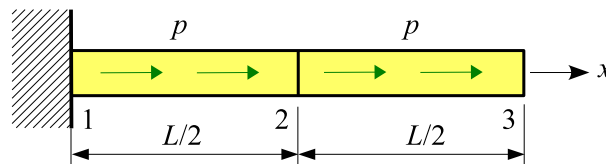
$$\begin{Bmatrix} -N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{17} \begin{Bmatrix} 8 \\ -42 \end{Bmatrix}$$

L'effort normal $N(x)$ et la contrainte normale $\sigma_{xx}(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_6

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soit E le module de Young du matériau. L'aire de la section droite est égale à A .



La poutre est encastree en 1.

La poutre est soumise à une force uniformément répartie sur toute sa longueur d'intensité linéique p .

1. Calculer les déplacements nœuds et l'action de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœuds.
3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$ et $u(x)$.

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1=0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x}=? \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL/4 \\ pL/2 \\ pL/4 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et de l'action de liaison

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL/2 \\ pL/4 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{3}{8} \frac{pL^2}{EA}, \quad u_3 = \frac{1}{2} \frac{pL^2}{EA}$$

La réaction d'appui est solution de l'équation $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{2EA}{L}(-u_2) = F_{1x} + \frac{pL}{4}$$

d'où :

$$F_{1x} = -pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + pL = -pL + 0 + 0 + pL = 0$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

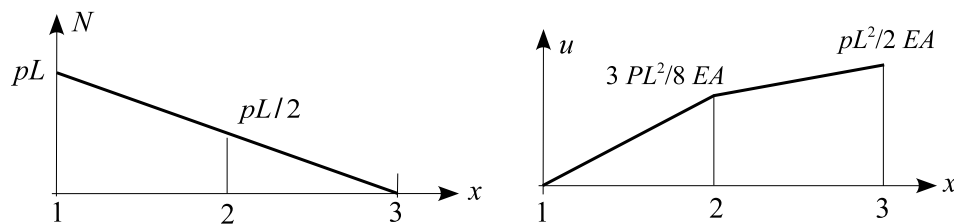
– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL \\ pL/2 \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

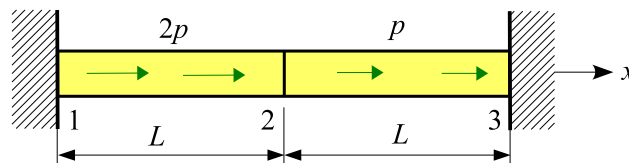
$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'effort normal $N(x)$ et le champ de déplacements $u(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_7

La poutre représentée sur la figure est discrétisée en deux éléments de même longueur L .



Soient E et A respectivement le module de Young du matériau et l'aire de la section droite.

Les sections 1 et 3 sont encastées.

La poutre porte :

- entre les nœuds 1 et 2 une force uniformément répartie d'intensité linéique $2p$.
 - entre les nœuds 2 et 3 une force uniformément répartie d'intensité linéique p .
1. Calculer le déplacement du nœud 2 et les actions de liaison.
 2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
 3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$ et $u(x)$.

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1+1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ 0 \\ F_{3x} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL \\ 3pL/2 \\ pL/2 \end{Bmatrix}$$

Calcul du déplacement inconnu et des actions de liaison

Le déplacement inconnu est solution de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EA}{L} (2u_2) = 3pL/2$$

d'où :

$$u_2 = \frac{3}{4} \frac{pL^2}{EA}$$

Les réactions d'appui sont les solutions de l'équation $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \{u_2\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL \\ pL/2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = -\frac{7}{4} pL \quad , \quad F_{3x} = -\frac{5}{4} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + 3pL = -\frac{7}{4} pL + 0 - \frac{5}{4} pL + 3pL = 0$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - pL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{4} \begin{Bmatrix} -7 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

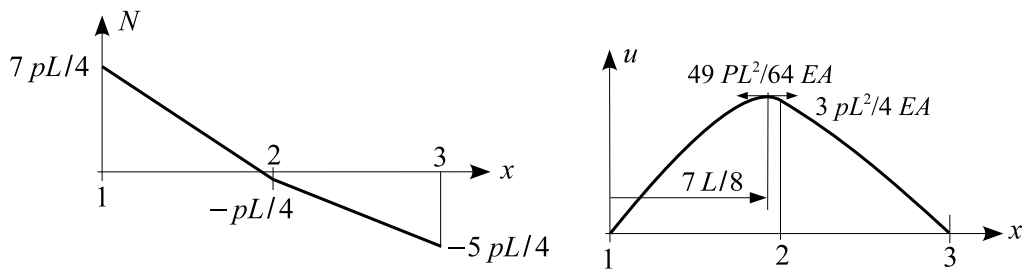
Le déplacement est maximal pour $x = x_m$ tel que $N(x_m) = N_1 - 2px_m = 0$, d'où :

$$x_m = \frac{7}{8}L \quad , \quad u(x_m) = \frac{49}{64} \frac{pL^2}{EA} = 0.766 \frac{pL^2}{EA}$$

– élément 2-3 :

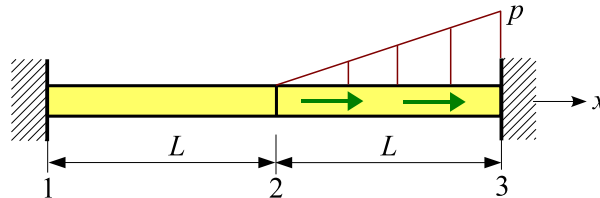
$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

L'effort normal $N(x)$ et le champ de déplacements $u(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_8

La poutre représentée sur la figure est discrétisée en deux éléments. Soient E le module de Young du matériau et A l'aire de la section droite. La poutre est encastrée en 1 et 3.



La poutre est soumise entre les nœuds 2 et 3 à une force répartie dont l'intensité linéique varie entre les valeurs 0 et p .

1. Calculer les déplacements nœux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœux.
3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$ et $u(x)$.

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1+1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ 0 \\ F_{3x} = ? \end{Bmatrix} + \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Calcul du déplacement inconnu et des actions de liaison

Le déplacement inconnu est solution de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EA}{L} (2 u_2) = \frac{pL}{6}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{1}{12} \frac{pL^2}{EA}$$

Les réactions d'appui sont les solutions de l'équation $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \{u_2\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} + \frac{pL}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = -\frac{1}{12} pL \quad , \quad F_{3x} = -\frac{5}{12} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \frac{1}{2} pL = -\frac{1}{12} pL + 0 - \frac{5}{12} pL + \frac{1}{2} pL = 0$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

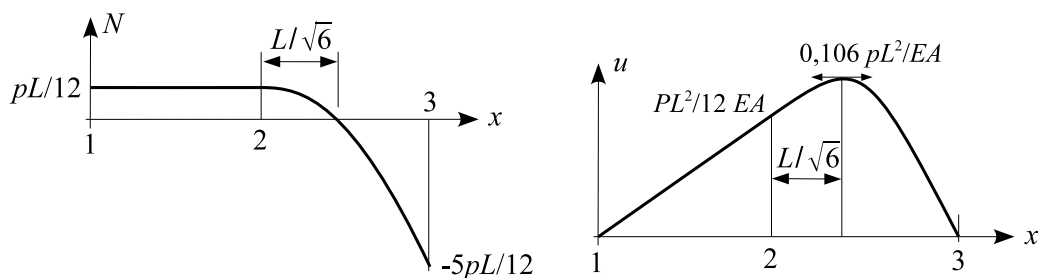
– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

Le déplacement est maximal pour $x = x_m$ tel que $N(x_m) = N_2 - p x_m^2 / (2L) = 0$, d'où :

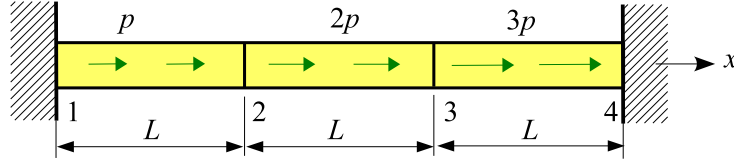
$$x_m = L/\sqrt{6} \quad , \quad u(x_m) = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{36\sqrt{6}} \frac{pL^2}{EA} = 0.106 \frac{pL^2}{EA}$$

L'effort normal $N(x)$ et le champ de déplacements $u(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_9

La poutre représentée sur la figure est encastree à ses deux extrémités. E et A sont respectivement le module de Young du matériau et l'aire de la section droite.



La poutre porte une force uniformément répartie d'intensité linéique p entre les nœuds 1 et 2, $2p$ entre les nœuds 2 et 3 et $3p$ entre les nœuds 3 et 4 avec $p > 0$.

1. Calculer les déplacements nœdaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœdaux.
3. Représentations graphiques : tracer $N(x)$ et $u(x)$.

Solution**Assemblage**

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1+1 & -1 & \\ & -1 & 1+1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{4x} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL/2 \\ pL/2 + pL \\ pL + 3pL/2 \\ 3pL/2 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaison

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3pL/2 \\ 5pL/2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{11}{6} \frac{pL^2}{EA}, \quad u_3 = \frac{13}{6} \frac{pL^2}{EA}$$

Les actions de liaisons sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL/2 \\ 3pL/2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = -\frac{7}{3} pL, \quad F_{4x} = -\frac{11}{3} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + 6pL = -\frac{7}{3} pL + 0 - \frac{11}{3} pL + 6pL = 0$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{3} \begin{Bmatrix} -7 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - pL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{3} \begin{Bmatrix} -4 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

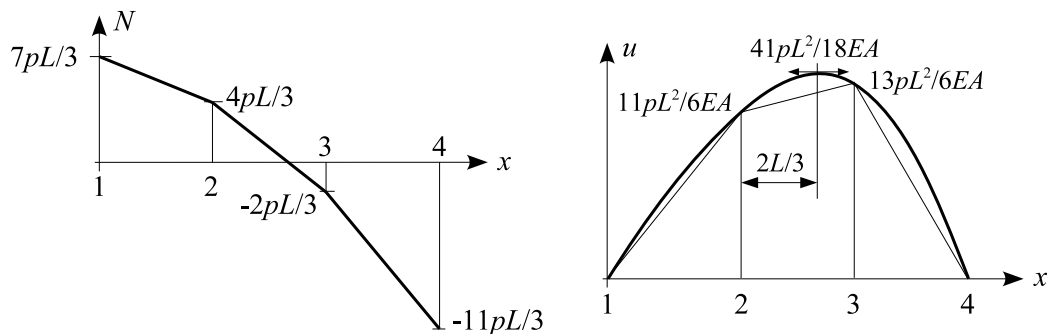
Le déplacement est maximal pour $x = x_m$ tel que $N(x_m) = N_2 - 2px_m = 0$, d'où :

$$x_m = 2L/3 \quad , \quad u(x_m) = \frac{41}{18} \frac{pL^2}{EA}$$

– élément 3-4 :

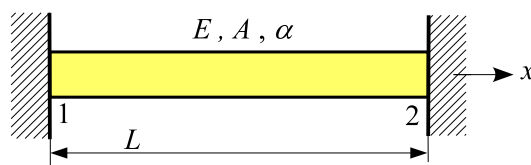
$$\begin{Bmatrix} -N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \frac{3pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{3} \begin{Bmatrix} 2 \\ -11 \end{Bmatrix}$$

L'effort normal $N(x)$ et le champ de déplacements $u(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_NOR_10 : poutre soumise à une variation de température

La poutre représentée sur la figure est encastree à ses deux extrémités et a une section droite constante dont l'aire est A et le moment quadratique par rapport à z , I_z .



Soient E et α respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

La poutre est soumise à une variation de température $\Delta T > 0$.

1. Calculer l'effort normal et la contrainte normale σ_{xx} dans la poutre.

2. Application numérique. On donne :

$$L = 1 \text{ m}, E = 200000 \text{ MPa}, \alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \Delta T = 100 \text{ K}.$$

La poutre est un rond plein de diamètre D .

Calculer la contrainte normale σ_{xx} et l'effort normal N .

Sachant que la force critique d'Euler pour une poutre bi-encastée est :

$$F_{\text{Euler}} = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2}$$

Calculer D .

Solution

L'effort normal dans la poutre est :

$$N = -EA\alpha \Delta T$$

d'où la contrainte normale

$$\sigma_{xx} = -E\alpha \Delta T = -200000 \times 10^{-5} \times 100 = -200 \text{ MPa}$$

L'équilibre de la poutre est stable si :

$$\|N\| = EA\alpha \Delta T < \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2}$$

avec :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad , \quad I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

soit :

$$D^2 > \frac{4\alpha L^2 \Delta T}{\pi^2} = \frac{4 \times 10^{-5} \times 1000^2 \times 100}{\pi^2}$$

d'où :

$$D > 20.13 \text{ mm}$$

Remarque : l'allongement unitaire dans les directions $\vec{j}$ et $\vec{k}$ est égal à :

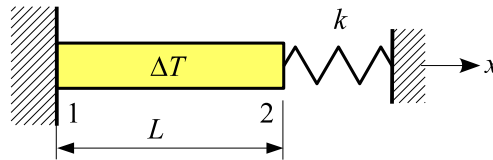
$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \alpha \Delta T = (1 + \nu) \alpha \Delta T$$

Si $\nu = 0.3$, on obtient :

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = (1 + 0.3) \times 10^{-5} \times 100 = 1300 \times 10^{-6}$$

MEF_NOR_11 : poutre soumise à une variation de température

La poutre représentée sur la figure est constituée d'un élément de longueur L .



A est l'aire de la section droite.

E et α sont respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

La section 1 est encastree. La section 2 repose sur un appui élastique de raideur k . Lorsque la structure n'est pas chargée, le ressort est au repos.

La poutre est soumise à une variation de température $\Delta T > 0$.

1. Effectuer l'étude élémentaire.
2. Effectuer l'assemblage.
3. Calculer le déplacement du nœud 2 et l'effort normal N dans la poutre.
4. Représenter graphiquement l'allure de u_2 et N en fonction de la raideur k du ressort.

Solution

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F_{\text{th}}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{2x} = -k u_2 \end{Bmatrix} + EA\alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

u_2 est solution de l'équation :

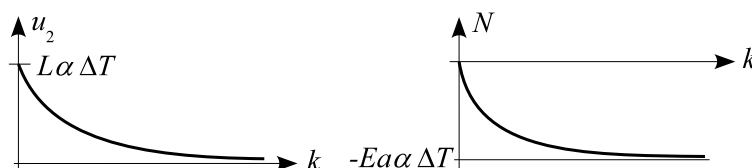
$$\left(\frac{EA}{L} + k \right) u_2 = EA\alpha \Delta T$$

d'où :

$$u_2 = L\alpha \Delta T \frac{1}{1 + \frac{kL}{EA}}$$

et :

$$N = F_{2x} = -k u_2 = -EA\alpha \Delta T \frac{k}{k + \frac{EA}{L}}$$



2.3 Treillis plans à nœuds articulés

2.3.1 Rappels

Soit $(i \rightarrow j)$ un élément de treillis plan de section droite constante. i est le nœud origine et j est le nœud extrémité.

Soient L la longueur de l'élément et A l'aire de la section droite.

Soient E et α respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

L'élément est soumis à une variation de température égale à ΔT constante dans l'élément.

(u_i, v_i) et (u_j, v_j) sont les déplacements nodaux.

Soit $\vec{n}$ de composantes (n_x, n_y) le vecteur unitaire ($n_x^2 + n_y^2 = 1$) porté par l'axe de la poutre :

$$n_x = \frac{x_j - x_i}{L} = \cos \theta, \quad n_y = \frac{y_j - y_i}{L} = \sin \theta, \quad L^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (2.3.1)$$

L'allongement unitaire suivant $\vec{n}$ est :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{L} (n_x (u_j - u_i) + n_y (v_j - v_i)) \quad (2.3.2)$$

De la relation de comportement :

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = E (\varepsilon_n - \alpha \Delta T) \quad (2.3.3)$$

on déduit l'expression de l'effort normal :

$$N = \frac{EA}{L} (n_x (u_j - u_i) + n_y (v_j - v_i)) - EA \alpha \Delta T \quad (2.3.4)$$

puis la relation :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f_{th}\} \quad (2.3.5a)$$

où

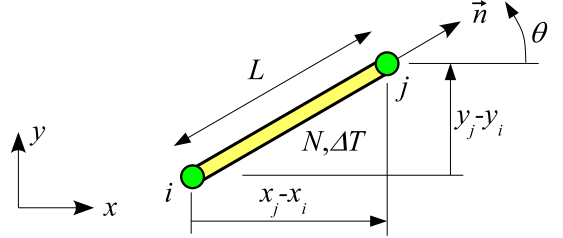
$$\{f_{\text{nod}}\} = N \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2.3.5b)$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & -n_x^2 & -n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 & -n_x n_y & -n_y^2 \\ -n_x^2 & -n_x n_y & n_x^2 & n_x n_y \\ -n_x n_y & -n_y^2 & n_x n_y & n_y^2 \end{bmatrix}, \quad \{f_{th}\} = E A \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (2.3.5c)$$

La force critique d'Euler est égale à :

$$F_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 E I_z}{L^2} \quad (2.3.6)$$

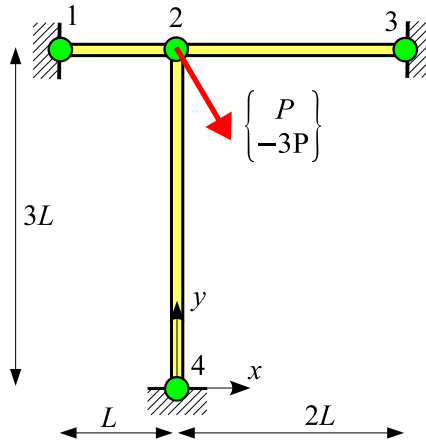
où I_z est le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe Gz (G est le centre de gravité de la section).



2.3.2 Exercices

MEF_TRE_1

Le treillis plan à nœuds articulés représenté sur la figure est composé de trois poutres de même nature (module de Young E , limite élastique σ_E) et de même section droite (aire A).



Les nœuds 1, 3 et 4 sont articulés. Le nœud 2 porte une force de composantes $(P, -3P, 0)$ avec $P > 0$.

1. Calculer les déplacements des nœuds.
2. Calculer les actions de liaison et vérifier l'équilibre de la structure.
3. Calculer les efforts normaux dans les poutres.
4. On donne : $L = 0.8 \text{ m}$, $P = 25000 \text{ N}$, $E = 200000 \text{ MPa}$, $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$.
Les poutres sont des carrés pleins de côté c . Déterminer c pour que les critères de traction, compression et flambement (critère d'Euler) soient satisfaits.

Solution

Étude élémentaire et assemblage

Les caractéristiques élémentaires sont :

- élément 1 – 2 : L , E , A , $n_x = 1$, $n_y = 0$
- élément 2 – 3 : $2L$, E , A , $n_x = 1$, $n_y = 0$
- élément 4 – 2 : $3L$, E , A , $n_x = 0$, $n_y = 1$

d'où les matrices de rigidité élémentaires :

$$[k_{1-2}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{4-2}] = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ & & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ v_2 = ? \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{1y} = ? \\ F_{2x} = P \\ F_{2y} = -3P \\ F_{3x} = ? \\ F_{3y} = ? \\ F_{4x} = ? \\ F_{4y} = ? \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaison

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -3P \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{2}{3} \frac{PL}{EA} \quad , \quad v_2 = -9 \frac{PL}{EA}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2P/3 \\ 0 \\ -P/3 \\ 0 \\ 0 \\ 3P \end{Bmatrix}$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -2P/3 + P - P/3 + 0 = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 - 3P + 0 + 3P = 0$$

Calcul des efforts normaux

Les efforts normaux sont :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L} (1(u_2 - u_1) + 0(v_2 - v_1)) = 2P/3 > 0 \quad (\text{traction})$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{2L} (1(u_3 - u_2) + 0(v_3 - v_2)) = -P/3 < 0 \quad (\text{compression})$$

$$N_{4-2} = \frac{EA}{3L} (0(u_2 - u_4) + 1(v_2 - v_4)) = -3P < 0 \quad (\text{compression})$$

Dimensionnement

Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{3P}{A} < \sigma_E$$

soit :

$$A = c^2 > \frac{3P}{\sigma_E} = \frac{3 \times 250000}{300}$$

d'où :

$$c > 50 \text{ mm}$$

La condition de stabilité des éléments s'écrit :

$$|N_{2-3}| = \frac{P}{3} < \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2} \quad , \quad |N_{4-2}| = 3P < \frac{\pi^2 EI_z}{9L^2}$$

soit :

$$I_z = \frac{c^4}{12} > \frac{27PL^2}{\pi^2 E}$$

On en déduit :

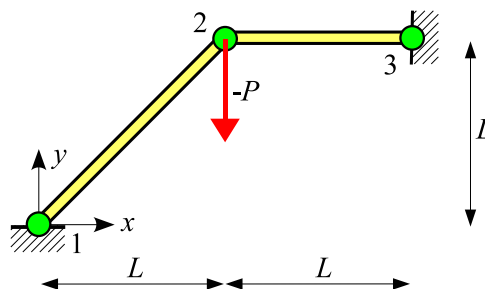
$$c^4 > \frac{12 \cdot 27 PL^2}{\pi^2 E} = \frac{12 \times 27 \times 250000 \times 800^2}{\pi^2 \times 200000}$$

d'où :

$$c > 71.59 \text{ mm}$$

MEF_TRE_2

Le treillis plan à nœuds articulés représenté sur la figure est composé de deux poutres de même section droite (aire A) et de même matériau (module de Young E , limite élastique σ_E).



Les nœuds 1 et 3 sont articulés. Le nœud 2 porte une force de composantes $(0, -P, 0)$ avec $P > 0$.

1. Calculer les déplacements des nœuds.
2. Calculer les actions de liaison et vérifier l'équilibre de la structure.
3. Calculer les efforts normaux dans les poutres.
4. On donne : $L = 0.2 \text{ m}$, $P = 10 \text{ kN}$, $E = 200000 \text{ MPa}$, $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$.
Les poutres sont des carrés pleins de côté c . Déterminer c pour que les critères de traction, compression et flambement (critère d'Euler) soient satisfaits.

Solution

Étude élémentaire et assemblage

Les caractéristiques élémentaires sont :

- élément 1-2 : $L\sqrt{2}$, E , A , $n_x = n_y = 1/\sqrt{2}$
- élément 2-3 : L , E , A , $n_x = 1$, $n_y = 0$

d'où les matrices de rigidité élémentaires :

$$[k_{1-2}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2\sqrt{2} + 1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ v_2 = ? \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{1y} = ? \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = -P \\ F_{3x} = ? \\ F_{3y} = ? \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaison

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = \frac{PL}{EA} , \quad v_2 = -(1 + 2\sqrt{2}) \frac{PL}{EA}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = F_{1y} = P , \quad F_{3x} = -P , \quad F_{3y} = 0$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = P + 0 - P = 0 , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = P - P + 0 = 0$$

Calcul des efforts normaux

Les efforts normaux sont :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 - u_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 - v_1) \right) = -\sqrt{2}P < 0 \quad (\text{compression})$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L} (1(u_3 - u_2) - 0(v_3 - v_2)) = -P < 0 \quad (\text{compression})$$

Dimensionnement

Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{2}P}{A} < \sigma_E$$

soit :

$$A = c^2 > \frac{\sqrt{2}P}{\sigma_E} = \frac{\sqrt{2} \times 10000}{300}$$

d'où :

$$c > 6.87 \text{ mm}$$

La condition de stabilité des éléments s'écrit :

$$|N_{1-2}| = \sqrt{2}P < \frac{\pi^2 EI_z}{2L^2} \quad , \quad \|N_{2-3}\| = P < \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

On en déduit :

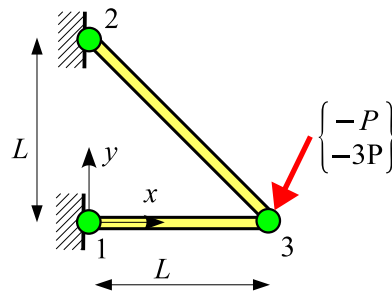
$$I_z = \frac{c^4}{12} > \frac{2\sqrt{2}PL^2}{\pi^2 E} = \frac{2 \times \sqrt{2} \times 10000 \times 200^2}{\pi^2 \times 200000}$$

d'où :

$$c > 9.11 \text{ mm}$$

MEF_TRE_3

Le treillis plan représenté sur la figure est composé de deux poutres articulées entre elles. Les nœuds 1 et 3 sont articulés. Soient E et σ_E respectivement le module de Young et la limite élastique du matériau. L'aire des sections droites est égale à A .



Le nœud 2 porte une force de composantes $(-P, -2P, 0)$ avec $P > 0$.

1. Calculer les déplacements des nœuds.
2. Calculer les actions de liaison et vérifier l'équilibre de la structure.
3. Calculer les efforts normaux dans les poutres.

Solution

Étude élémentaire et assemblage

Les caractéristiques élémentaires sont :

- élément 1-3 : L , E , A , $n_x = 1$, $n_y = 0$
- élément 2-3 : $L\sqrt{2}$, E , A , $n_x = 1/\sqrt{2}$, $n_y = -1/\sqrt{2}$

d'où les matrices de rigidité élémentaires :

$$[k_{1-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 & -1 & 1 & 2\sqrt{2}+1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = ? \\ v_3 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{1y} = ? \\ F_{2x} = ? \\ F_{2y} = ? \\ F_{3x} = -P \\ F_{3y} = -3P \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaison

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -3P \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_3 = -4 \frac{PL}{EA} , \quad v_3 = -(4 + 6\sqrt{2}) \frac{PL}{EA}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = 4P , \quad F_{1y} = 0 , \quad F_{2x} = -3P , \quad F_{2y} = 3P$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 4P - P - 3P = 0 , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 + 3P - 3P = 0$$

Calcul des efforts normaux

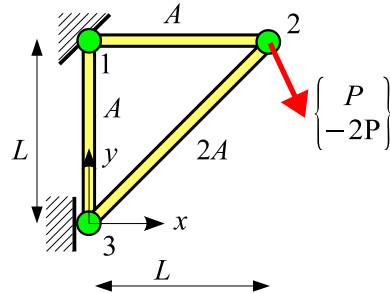
Les efforts normaux sont :

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L} (1(u_3 - u_1) + 0(v_3 - v_1)) = -4P < 0 \quad (\text{compression})$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_3 - u_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(v_3 - v_2) \right) = 3\sqrt{2}P > 0 \quad (\text{traction})$$

MEF_TRE_4

Le treillis plan représenté sur la figure est composé de trois poutres. La structure est en acier de module de Young E .



L'aire des sections droites est A (poutres 3-1 et 1-2) et $2A$ (poutre 3-2).

Le nœud 1 est articulé et le nœud 3 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale. Le nœud 2 porte une force de composantes $(P, -2P, 0)$ avec $P > 0$.

1. Calculer les déplacements des nœuds.
2. Calculer les actions de liaison et vérifier l'équilibre de la structure.
3. Calculer les tensions dans les poutres.
4. On donne : $P = 25000 \text{ N}$, $L = 0.6 \text{ m}$, $E = 200000 \text{ MPa}$, $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$
Les poutres 3-1 et 1-2 sont des ronds pleins de diamètre D ; la poutre 3-2 est un rond plein de diamètre $\sqrt{2}D$. Calculer D .

Solution**Étude élémentaire et assemblage**

Les caractéristiques élémentaires sont :

- élément 1-2 : L , E , A , $n_x = 1$, $n_y = 0$
- élément 3-1 : L , E , A , $n_x = 0$, $n_y = 1$
- élément 3-2 : $L\sqrt{2}$, E , $2A$, $n_x = n_y = 1/\sqrt{2}$

d'où les matrices de rigidité élémentaires :

$$[k_{1-2}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad [k_{3-1}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{3-2}] = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}+1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ v_2 = ? \\ u_3 = 0 \\ v_3 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{1y} = ? \\ F_{2x} = P \\ F_{2y} = -2P \\ F_{3x} = ? \\ F_{3y} = 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaison

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -2P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$u_2 = 3 \frac{PL}{EA} \quad , \quad v_2 = -(5 + 2\sqrt{2}) \frac{PL}{EA} \quad , \quad v_3 = -2 \frac{PL}{EA}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1x} = -3P \quad , \quad F_{1y} = 2P \quad , \quad F_{3x} = 2P$$

L'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -3P + P + 2P = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 2P - 2P + 0 = 0$$

Calcul des efforts normaux

Les efforts normaux sont :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L} (1(u_2 - u_1) + 0(v_2 - v_1)) = 3P > 0 \quad (\text{traction})$$

$$N_{3-1} = \frac{EA}{L} (0(u_3 - u_1) + 1(v_3 - v_1)) = 2P > 0 \quad (\text{traction})$$

$$N_{3-2} = \frac{2EA}{L\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 - u_3) + \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 - v_3) \right) = -2\sqrt{2}P < 0 \quad (\text{compression})$$

Les contraintes normales sont :

$$\sigma_{1-2} = \frac{3P}{A} \quad , \quad \sigma_{3-1} = \frac{2P}{A} \quad , \quad \sigma_{3-2} = -\frac{\sqrt{2}P}{A}$$

Dimensionnement

Le dimensionnement en contrainte s'écrit :

$$\sigma_{\max} = \frac{3P}{A} < \sigma_E$$

soit :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} > \frac{3P}{\sigma_E}$$

d'où :

$$D^2 > \frac{12P}{\pi\sigma_E} = \frac{12 \times 25000}{\pi \times 300}$$

soit :

$$D > 17.85 \text{ mm}$$

La condition de stabilité de l'élément 3 – 2 s'écrit :

$$|N_{3-2}| = 2\sqrt{2}P < \frac{\pi^2 EI_{z32}}{2L^2}$$

soit :

$$I_{z32} = \frac{\pi(\sqrt{2}D)^4}{64} > \frac{4\sqrt{2}PL^2}{\pi^2 E}$$

On en déduit :

$$D^4 > \frac{64\sqrt{2}PL^2}{\pi^3 E} = \frac{64 \times \sqrt{2} \times 25000 \times 600^2}{\pi^3 \times 200000}$$

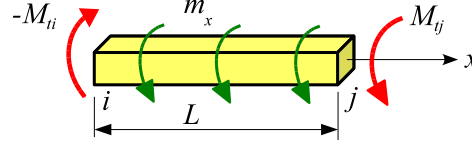
d'où :

$$D > 19.03 \text{ mm}$$

2.4 Poutre soumise à un moment de torsion

2.4.1 Rappels

Considérons l'élément de poutre droite $(i - j)$, de longueur L et de section droite constante, soumis à un moment de torsion $M_t(x)$.



J est la constante de torsion de Saint-Venant et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module d'élasticité transversal.

L'élément porte sur toute sa longueur un couple linéairement réparti d'intensité linéique $(m_x, 0, 0)$ avec :

$$m_x x = m_{xi} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + m_{xj} \frac{x}{L} = m_{xi} + (m_{xj} - m_{xi}) \frac{x}{L} \quad (2.4.1)$$

θ_{xi} et θ_{xj} sont les déplacements nodaux.

M_{ti} et M_{tj} sont les moments de torsion dans les sections i et j .

L'intégration de l'équation d'équilibre :

$$\frac{dM_t}{dx} + m_x = 0 \quad \text{avec } M_t(0) = M_{ti} \quad (2.4.2)$$

conduit à l'expression du moment de torsion :

$$M_t(x) = M_{ti} - m_{xi} x - (m_{xj} - m_{xi}) \frac{x^2}{2L} \quad , \quad (2.4.3)$$

L'intégration de la relation de comportement :

$$M_t = GJ \frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{avec } \theta_x(0) = \theta_{xi} \quad (2.4.4)$$

donne la déformée :

$$\theta_x(x) = \theta_{xi} + \frac{1}{GJ} \left(M_{ti} x - m_{xi} \frac{x^2}{2} - (m_{xj} - m_{xi}) \frac{x^3}{6L} \right) \quad (2.4.5)$$

Des conditions aux limites :

$$M_t(L) = M_{tj} \quad , \quad \theta_x(L) = \theta_{xj}$$

on déduit :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} \quad (2.4.6a)$$

avec :

$$\{f_{\text{nod}}\} = \begin{Bmatrix} -M_t(0) \\ M_t(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_{ti} \\ M_{tj} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix} \quad (2.4.6b)$$

$$[k] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \{f\} = \frac{L}{6} \begin{Bmatrix} 2m_{xi} + m_{xj} \\ m_{xi} + 2m_{xj} \end{Bmatrix} \quad (2.4.6c)$$

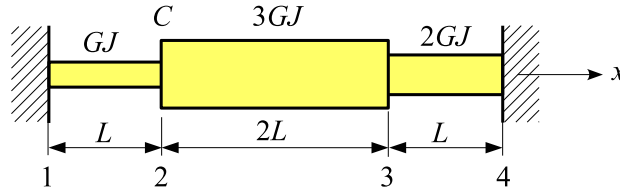
Remarque : l'équilibre de l'élément s'écrit :

$$-M_{ti} + M_{tj} + \frac{L}{2} (m_{xi} + m_{xj}) = 0 \quad (2.4.7)$$

2.4.2 Exercices

MEF_TOR_1

Considérons l'arbre (1, 2, 3, 4) représenté sur la figure ci-contre. Soit G le module d'élasticité de glissement du matériau. La rigidité de torsion est égale à GJ entre les nœuds 1 et 2, $3GJ$ entre les nœuds 2 et 3 et à $2GJ$ entre les nœuds 3 et 4.



La poutre est encastrée en 1 et 4. Elle est sollicitée au nœud 2 par un couple $(C, 0, 0)$ avec $C > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
3. Représentations graphiques : tracer $M_t(x)$ et $\theta_x(x)$.

Solution.

Les matrices de rigidité élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{3GJ}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{3-4}] = \frac{2GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2+2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ C \\ 0 \\ M_{4x} \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 5/2 & -3/2 \\ -3/2 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{x2} = \frac{7}{13} \frac{CL}{GJ}, \quad \theta_{x3} = \frac{3}{13} \frac{CL}{GJ}$$

Les actions de liaisons sont les solutions de $[K_{PL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ M_{4x} \end{Bmatrix}$$

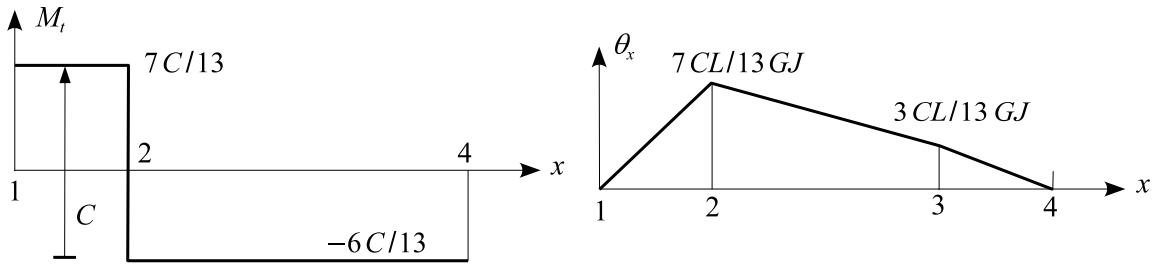
d'où :

$$M_{1x} = -\frac{7}{13} C, \quad M_{4x} = -\frac{6}{13} C$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

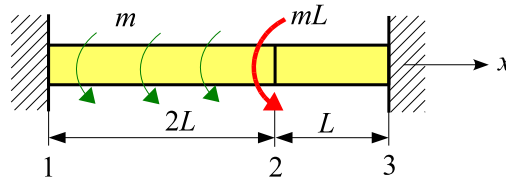
$$M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} + M_{4x} = -\frac{7}{13} C + C + 0 - \frac{6}{13} C = 0$$

Le moment de torsion $M_t(x)$ et la rotation des sections droites $\theta_x(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



MEF_TOR_2

La poutre de longueur $3L$ et de section constante représentée sur la figure ci-contre est encastree à ses deux extrémités. Soient J la constante de torsion de Saint-Venant et G le module d'élasticité transversal.



Elle porte entre les nœuds 1 et 2 un couple de torsion uniformément réparti d'intensité linéique m . Le nœud 2 est soumis à un couple de torsion d'intensité mL .

1. Calculer les déplacements nœdaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœdaux.
3. Représentations graphiques : tracer $M_t(x)$ et $\theta_x(x)$.

Solution.

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{GJ}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{f_{1-2}\} = mL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{\text{nœd}}\} + \{F\}$:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 + 1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} = 0 \\ \theta_{x2} = ? \\ \theta_{x3} = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{1x} = ? \\ mL \\ M_{3x} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} mL \\ mL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le déplacement inconnu est solution de l'équation l'équation $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nœd},L}\} + \{F_L\}$:

$$\frac{GJ}{L} \frac{3}{2} \theta_{x2} = 2mL$$

d'où :

$$\theta_{x2} = \frac{4}{3} \frac{mL^2}{GJ}$$

Les actions de liaisons sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \{\theta_{x2}\} = \begin{Bmatrix} M_{1x} \\ M_{3x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} mL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$M_{1x} = -\frac{5}{3}mL \quad , \quad M_{3x} = -\frac{4}{3}mL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} + 2mL = -\frac{5}{3}mL + mL - \frac{4}{3}mL + 2mL = 0$$

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -M_{t1} \\ M_{t2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} - mL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{mL}{3} \begin{Bmatrix} -5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

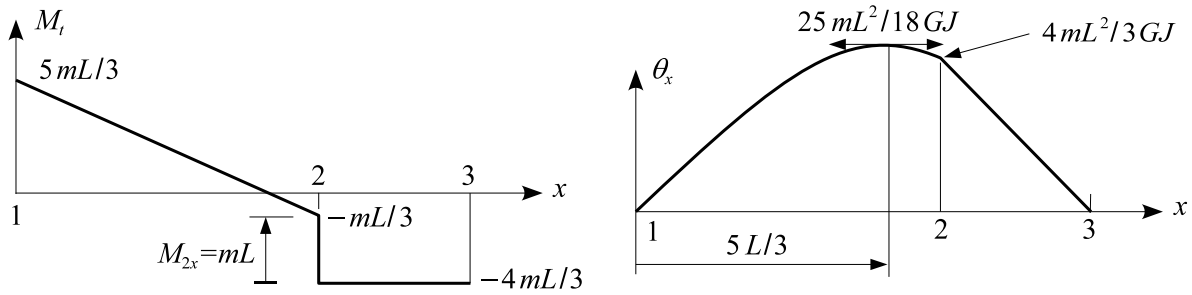
Le déplacement est maximal pour $x = x_m$ tel que $M_t(x_m) = M_{t1} - m x_m = 0$, d'où :

$$x_m = \frac{5}{3}L \quad , \quad \theta_x(x_m) = \frac{25}{18} \frac{mL^2}{GJ} = 1.39 \frac{mL^2}{GJ}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -M_{t2} \\ M_{t3} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \end{Bmatrix} = \frac{mL}{3} \begin{Bmatrix} 4 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

Le moment de torsion $M_t(x)$ et la rotation des sections droites $\theta_x(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.

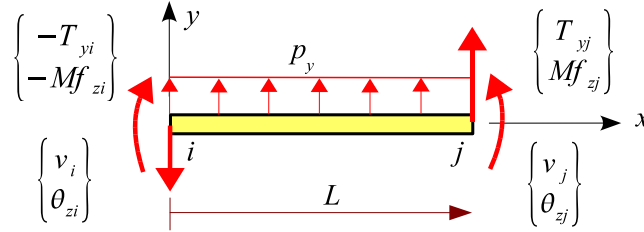


2.5 Flexion des poutres à plan moyen : modèle de Bernoulli

2.5.1 Rappels : flexion dans le plan $\{xy\}$

Pour chaque poutre étudiée :

- l'axe x est la fibre moyenne de la poutre.
- le plan $\{x, y\}$ est un plan de symétrie des sections de la poutre.
- l'axe z forme avec les axes x et y un trièdre direct.



L'élément de poutre $(i-j)$ représenté ci-contre, de longueur L , de moment quadratique I_z constant et de module de Young E est soumis sur toute sa longueur à une force uniformément répartie d'intensité linéique p_y .

EI_z est la rigidité de flexion linéique de la poutre.

T_y et Mf_z sont l'effort tranchant et le moment fléchissant.

v et θ_z sont respectivement le déplacement suivant y (flèche) et la rotation autour de l'axe z d'une section droite.

(T_{yi}, Mf_{zi}) et (T_{yj}, Mf_{zj}) sont les efforts nodaux.

(v_i, θ_{zi}) et (v_j, θ_{zj}) sont les déplacements nodaux.

L'intégration des deux équations d'équilibre :

$$\frac{dT_y}{dx} + p_y = 0 \quad \text{avec} \quad T_y(0) = T_{yi} \quad (2.5.1)$$

et

$$\frac{dMf_z}{dx} + T_y = 0 \quad \text{avec} \quad Mf_z(0) = Mf_{zi} \quad (2.5.2)$$

conduit à l'expression de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

$$\begin{cases} T_y(x) = T_{yi} - p_y x \\ Mf_z(x) = Mf_{zi} - T_{yi} x + p_y \frac{x^2}{2} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Remarque : si $p_y < 0$, l'effort tranchant s'annule pour x_m défini par :

$$T_y(x_m) = 0 \quad \text{soit} \quad x_m = \frac{T_{yi}}{p_y}$$

Si $0 < x_m < L$, le moment fléchissant passe par une valeur extrême :

$$Mf_z(x_m) = Mf_{zi} - \frac{T_{yi}^2}{2p_y}$$

La contrainte normale dans la poutre est égale à :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{y}{I_z} Mf_z(x) \quad (2.5.4)$$

La quantité $W_{el.z} = \frac{I_z}{|y|_{\max}}$ est le module de flexion élastique.

La relation de comportement s'écrit :

$$EI_z \frac{d\theta_z}{dx} = Mf_z \quad \text{avec} \quad \theta_z(0) = \theta_{zi} \quad (2.5.5)$$

Au cours de la mise en charge, une section droite reste plane et perpendiculaire à la déformée de la fibre moyenne (**hypothèse de Bernoulli**) d'où la relation cinématique :

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} \quad \text{avec} \quad v(0) = v_i \quad (2.5.6)$$

La déformée et la rotation des sections droites sont données par les formules :

$$\begin{cases} \theta_z(x) = \theta_{zi} + \frac{1}{EI_z} \left(Mf_{zi} x - T_{yi} \frac{x^2}{2} + p_y \frac{x^3}{6} \right) \\ v(x) = v_i + \theta_{zi} x + \frac{1}{EI_z} \left(Mf_{zi} \frac{x^2}{2} - T_{yi} \frac{x^3}{6} + p_y \frac{x^4}{24} \right) \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Des conditions aux limites :

$$T_y(L) = T_{yj} \quad , \quad Mf_z(L) = Mf_{zj} \quad , \quad v(L) = v_j \quad , \quad \theta_z(L) = \theta_{zj} \quad (2.5.8)$$

on déduit l'expression des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} \quad (2.5.9a)$$

avec

$$\{f_{\text{nod}}\} = \begin{Bmatrix} -T_y(0) \\ -Mf_z(0) \\ T_y(L) \\ Mf_z(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T_{yi} \\ -Mf_{zi} \\ T_{yj} \\ Mf_{zj} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.5.9b)$$

$$[k] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \{f\} = \frac{p_y L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_y L/2 \\ p_y L^2/12 \\ p_y L/2 \\ -p_y L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (2.5.9c)$$

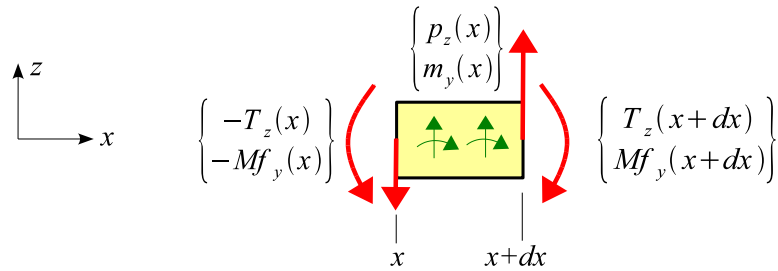
Remarque : l'équilibre de l'élément s'écrit :

$$\begin{cases} -T_{yi} + T_{yj} + p_y L = 0 \\ -Mf_{zi} + Mf_{zj} + L T_{yj} + \frac{1}{2} p_y L^2 = 0 \end{cases} \quad (2.5.10)$$

2.5.2 Exercices

MEF_FLE_1 : flexion dans le plan $\{x, z\}$

Soit une poutre droite sollicitée en flexion simple dans le plan $\{x, z\}$. Cette poutre porte une force répartie d'intensité linéique $(0, 0, p_z)$ et un couple réparti d'intensité linéique $(0, m_y, 0)$. Les efforts résultants dans la section droite d'abscisse x sont l'effort tranchant $T_z(x)$ et le moment fléchissant $Mf_y(x)$.



1. Écrire l'équilibre du tronçon de poutre compris entre les abscisses x et $x + dx$.
2. En déduire les équations différentielles que doivent satisfaire T_z et Mf_y .

Solution

L'équilibre du morceau de poutre compris entre les sections droites d'abscisses x et $x + dx$ s'écrit au premier ordre près :

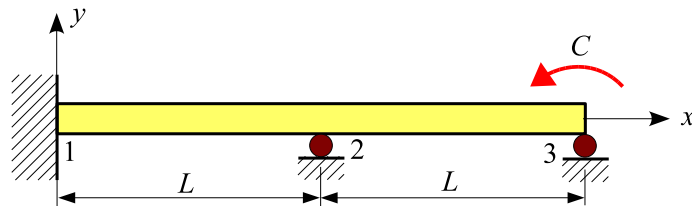
$$\begin{aligned} -T_z + T_z + \frac{dT_z}{dx} dx + p_z dx &= 0 \\ -Mf_y + Mf_y + \frac{dMf_y}{dx} dx - dx T_z + m_y dx &= 0 \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient les deux équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{dT_z}{dx} + p_z &= 0 \\ \frac{dMf_y}{dx} - T_z + m_y &= 0 \end{aligned}$$

MEF_FLE_2

La poutre droite représentée sur la figure est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Elle a une section constante de moment quadratique I_z .



La poutre est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3.

La section 3 porte un couple d'intensité $(0, 0, C)$ avec $C > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
3. Tracer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissants. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Application numérique : $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$, $C = 1000 \text{ daN.m}$. La poutre est un rond plein de diamètre D . Calculer D .

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = C \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{1}{14} \frac{CL}{EI_z} \quad , \quad \theta_{z3} = \frac{2}{7} \frac{CL}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = -\frac{3}{7} \frac{C}{L} \quad , \quad M_{1z} = -\frac{1}{7} C \quad , \quad F_{2y} = \frac{12}{7} \frac{C}{L} \quad , \quad F_{3y} = -\frac{9}{7} \frac{C}{L}$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \frac{C}{L} \left(-\frac{3}{7} + \frac{12}{7} - \frac{9}{7} \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} = C \left(-\frac{1}{7} + 0 + 1 + \frac{12}{7} - \frac{18}{7} \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

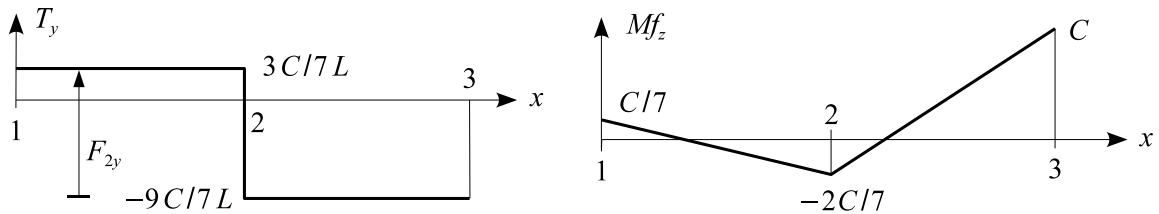
– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} = \frac{1}{7} \begin{Bmatrix} -3C/L \\ -C \\ 3C/L \\ -2C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{Bmatrix} 9C/L \\ 2C \\ -9C/L \\ 7C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}$$

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant est maximal dans la section 3 :

$$\max(|Mf_z(x)|) = C$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

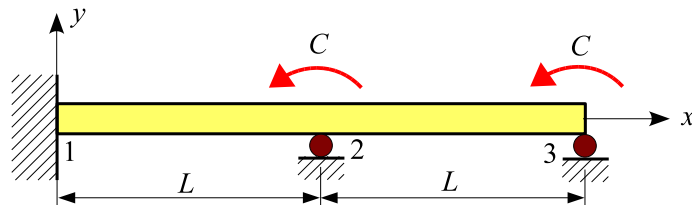
$$W_{el.z} = \frac{\pi D^3}{32} > \frac{C}{\sigma_E}$$

d'où :

$$D^3 > \frac{32C}{\pi \sigma_E} = \frac{32 \times 10^7}{\pi \times 300} \quad , \quad D > 69.76 \text{ mm}$$

MEF_FLE_3

La poutre droite représentée sur la figure est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Soient E le module de Young du matériau et I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre porte en 2 et 3 un couple ponctuel de composantes $(0, 0, C)$ avec $C > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.

3. Tracer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissants.
4. Application numérique : $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$, $C = 10000 \text{ N.m}$. Calculer $W_{\text{el},z}$.

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = C \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = C \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C \\ C \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = \frac{1}{14} \frac{CL}{EI_z} \quad , \quad \theta_{z3} = \frac{3}{14} \frac{CL}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = \frac{3}{7} \frac{C}{L} \quad , \quad M_{1z} = \frac{1}{7} C \quad , \quad F_{2y} = \frac{9}{7} \frac{C}{L} \quad , \quad F_{3y} = -\frac{12}{7} \frac{C}{L}$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \frac{C}{L} \left(\frac{3}{7} + \frac{9}{7} - \frac{12}{7} \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} = C \left(\frac{1}{7} + 1 + 1 + \frac{9}{7} - \frac{24}{7} \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

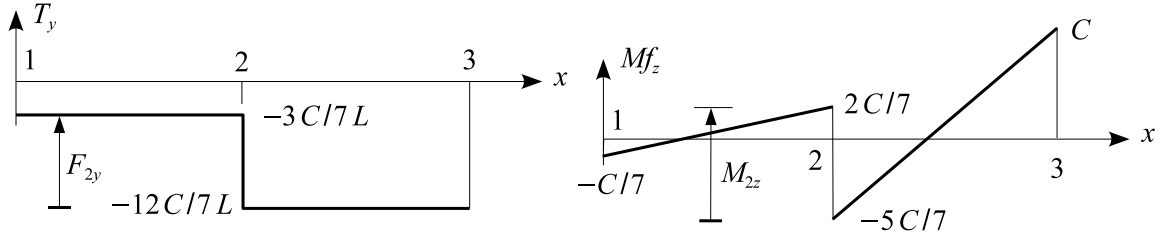
– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -M_{fz1} \\ T_{y2} \\ M_{fz2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} = \begin{Bmatrix} 3C/7L \\ C/7 \\ -3C/7L \\ 2C/7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12C/7L \\ 5C/7 \\ -12C/7L \\ C \end{Bmatrix} = F_{3y}$$

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant est maximal dans la section 3 :

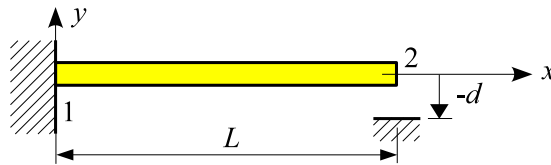
$$\max(|Mf_z(x)|) = C$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

$$W_{el.z} > \frac{C}{\sigma_E} = \frac{10000 \times 10^3}{300} = 33333 \text{ mm}^3 \simeq 34 \text{ cm}^3$$

MEF_FLE_4 : déplacement imposé

La poutre droite représentée sur la figure est encastree en 1. Soient E le module de Young du matériau et I_z le moment quadratique de la section droite.



Le nœud 2 subit un déplacement vertical égal à $v_2 = -d$ avec $d > 0$.

Calculer la pente en 2 et les actions de liaison.

Solution

L'assemblage conduit à la relation $[K]\{U\} = \{F_{nod}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = -d \\ \theta_{z2} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \end{Bmatrix}$$

La rotation θ_{z2} est solution de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = -[K_{LP}] \{U_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{3}{2} \frac{d}{L}$$

Les actions de liaison sont données par $[K_{PL}] \{U_L\} + [K_{PP}] \{U_P\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

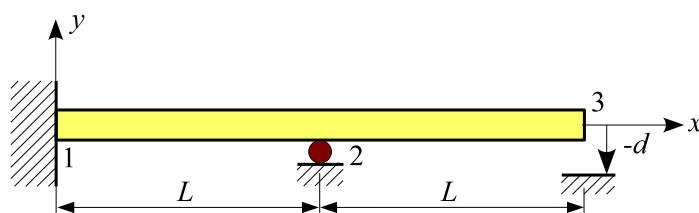
$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -d \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = -F_{2y} = 3 \frac{EI_z d}{L^3} \quad , \quad M_{1z} = 3 \frac{EI_z d}{L^2}$$

MEF_FLE_5 : déplacement imposé

La poutre droite représentée sur la figure ci-dessous est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Soit I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2. Le noeud 3 subit un déplacement vertical : $v_3 = -d$ avec $d > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Quelle inégalité doit satisfaire la grandeur $v = |y|_{\text{max}}$ (intervenant dans le module de flexion $W_{\text{el},z}$).
5. Application numérique :

$$E = 200000 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_E = 300 \text{ MPa} \quad , \quad L = 90 \text{ cm} \quad , \quad d = 6 \text{ mm}$$

Calculer v .

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = -d \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = -[K_{LP}] \{U_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ -d \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{3}{7} \frac{d}{L} \quad , \quad \theta_{z3} = -\frac{9}{7} \frac{d}{L}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} + [K_{PP}] \{U_P\} = \{F_{\text{nod},P}\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 & 0 \\ 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6L \\ -6L & 12 & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ -d \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = -\frac{18}{7} \frac{EI_z d}{L^3} \quad , \quad M_{1z} = -\frac{6}{7} \frac{EI_z d}{L^2} \quad , \quad F_{2y} = \frac{30}{7} \frac{EI_z d}{L^3} \quad , \quad F_{3y} = -\frac{12}{7} \frac{EI_z d}{L^3}$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \frac{EI_z d}{L^3} \left(-\frac{18}{7} + \frac{30}{7} - \frac{12}{7} \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + L F_{2y} + 2 L F_{3y} = \frac{EI_z d}{L^2} \left(-\frac{6}{7} + 0 + 0 + \frac{30}{7} - \frac{24}{7} \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

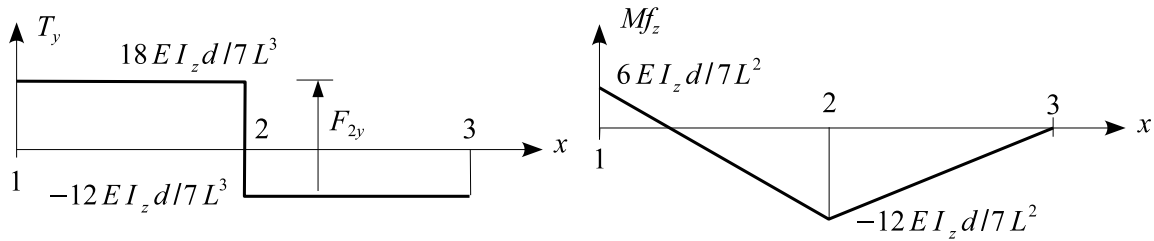
– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -M_{fz1} \\ T_{y2} \\ M_{fz2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 2L^2 \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} = \frac{EI_z d}{7L^3} \begin{Bmatrix} -18 \\ -6L \\ 18 \\ -12L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -M_{fz2} \\ T_{y3} \\ M_{fz3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ -d \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z d}{7L^3} \begin{Bmatrix} 12 \\ 12L \\ -12 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

$$\max(|Mf_z(x)|) = \frac{12}{7} \frac{EI_z d}{L^2}$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

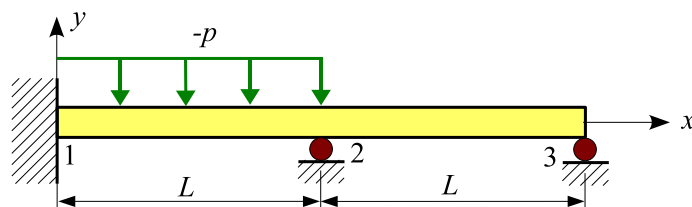
$$W_{el.z} = \frac{I_z}{v} > \frac{12}{7} \frac{EI_z d}{L^2 \sigma_E}$$

d'où :

$$v < \frac{7 L^2 \sigma_E}{12 E d} = \frac{7 \times 900^2 \times 300}{12 \times 200000 \times 6} \quad , \quad v < 118.1 \text{ mm}$$

MEF_FLE_6

La poutre droite représentée sur la figure est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Soit I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Elle porte entre les nœuds 1 et 2 une force uniformément répartie. Soit $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$ la force par unité de longueur.

1. Calculer les déplacements nœdaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœdaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Application numérique : $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$, $L = 1.7 \text{ m}$, $p = 2000 \text{ daN/m}$. La poutre est un rond plein de diamètre D . Valeur de D ?

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{pL^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = \frac{1}{84} \frac{pL^3}{EI_z} \quad , \quad \theta_{z3} = -\frac{1}{168} \frac{pL^3}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = \frac{4}{7} pL \quad , \quad M_{1z} = \frac{3}{28} pL^2 \quad , \quad F_{2y} = \frac{13}{28} pL \quad , \quad F_{3y} = -\frac{1}{28} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - pL = pL \left(\frac{4}{7} + \frac{13}{28} - \frac{1}{28} - 1 \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - \frac{pL^2}{2} = pL^2 \left(\frac{3}{28} + 0 + 0 + \frac{13}{28} - \frac{2}{28} - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

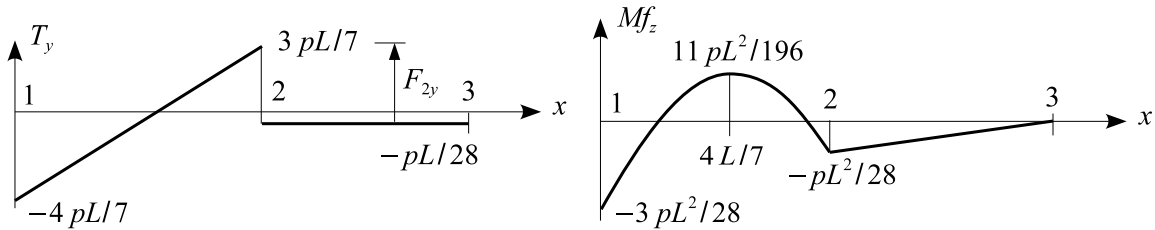
$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{1}{28} \begin{Bmatrix} 16pL \\ 3pL^2 \\ 12pL \\ -pL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} = F_{1y} \\ = M_{1z} \end{matrix}$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = 4L/7$ d'où $Mf_z(x_m) = 11pL^2/196 \simeq 0.056pL^2$.

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{28} \begin{Bmatrix} pL \\ pL^2 \\ -pL \\ 0 \end{Bmatrix} = F_{3y}$$

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

$$\max(|Mf_z(x)|) = 3pL^2/28$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

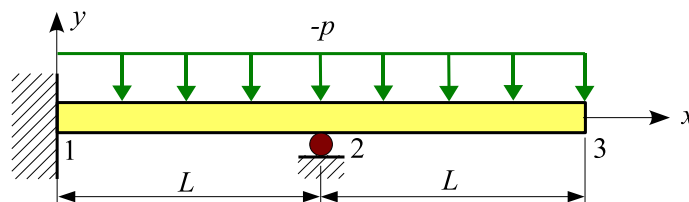
$$W_{el.z} = \frac{\pi D^3}{32} > \frac{3pL^2}{28\sigma_E}$$

d'où :

$$D^3 > \frac{24pL^2}{7\pi\sigma_E} = \frac{24 \times 20 \times 1700^2}{7 \times \pi \times 300} \quad , \quad D > 59.47 \text{ mm}$$

MEF_FLE_7

La poutre droite représentée sur la figure ci-contre est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Soit I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre est encastree en 1 et repose en 2 sur un appui simple. Elle porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie. Soit $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$ la force par unité de longueur.

1. Calculer les déplacements nœdaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœdaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.

4. Application numérique : $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$, $L = 0.8 \text{ m}$, $p = 2000 \text{ daN/m}$. La poutre est un rond plein de diamètre D . Valeur de D ?

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = ? \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = 0 \\ M_{3z} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL \\ 0 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{5}{48} \frac{pL^3}{EI_z} \quad , \quad v_3 = -\frac{11}{48} \frac{pL^4}{EI_z} \quad , \quad \theta_{z3} = -\frac{13}{48} \frac{pL^3}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 & 0 \\ 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = -\frac{1}{8} pL \quad , \quad M_{1z} = -\frac{1}{8} pL^2 \quad , \quad F_{2y} = \frac{17}{8} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - 2pL = pL \left(-\frac{1}{8} + \frac{17}{8} + 0 - 2 \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - 2pL^2 = pL^2 \left(-\frac{1}{8} + 0 + 0 + \frac{17}{8} - 2 \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

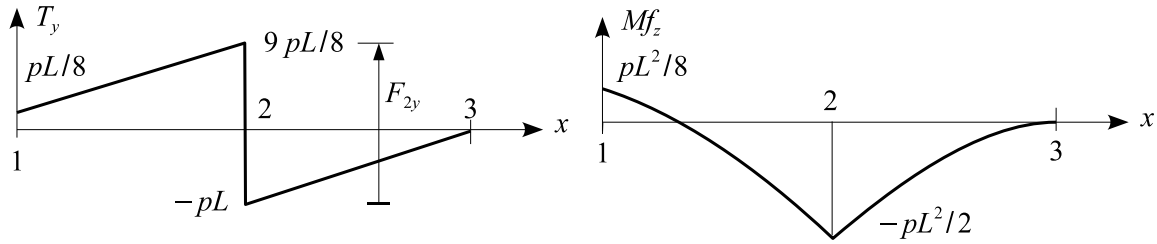
– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -M_{fz1} \\ T_{y2} \\ M_{fz2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL/8 \\ -pL^2/8 \\ 9pL/8 \\ -pL^2/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ pL^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

$$\max(|Mf_z(x)|) = pL^2/2$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

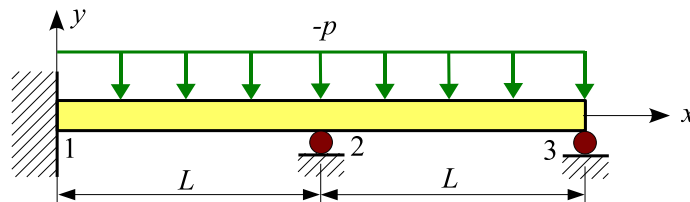
$$W_{el.z} = \frac{\pi D^3}{32} > \frac{pL^2}{2\sigma_E}$$

d'où :

$$D^3 > \frac{32 pL^2}{2\pi\sigma_E} = \frac{32 \times 20 \times 800^2}{2 \times \pi \times 300} \quad , \quad D > 60.12 \text{ mm}$$

MEF_FLE_8

La poutre droite représentée sur la figure est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Elle a une section constante de moment quadratique I_z . La poutre est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3. Elle porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité linéique $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$.



1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Application numérique : $\sigma_E = 300 \text{ MPa}$, $L = 0.6 \text{ m}$, $p = 1500 \text{ daN/m}$. Calculer le module de flexion élastique $W_{el.z}$.

Solution**Assemblage**

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL \\ 0 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{pL^2}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{1}{168} \frac{pL^3}{EI_z} \quad , \quad \theta_{z3} = \frac{1}{42} \frac{pL^3}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL \\ -pL/2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = \frac{13}{28} pL \quad , \quad M_{1z} = \frac{1}{14} pL^2 \quad , \quad F_{2y} = \frac{8}{7} pL \quad , \quad F_{3y} = \frac{11}{28} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - 2pL = pL \left(\frac{13}{28} + \frac{8}{7} + \frac{11}{28} - 2 \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - 2pL^2 = pL^2 \left(\frac{1}{14} + 0 + 0 + \frac{8}{7} + \frac{22}{28} - 2 \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{1}{28} \begin{Bmatrix} 13pL \\ 2pL^2 \\ 15pL \\ -3pL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} = F_{1y} \\ = M_{1z} \end{matrix}$$

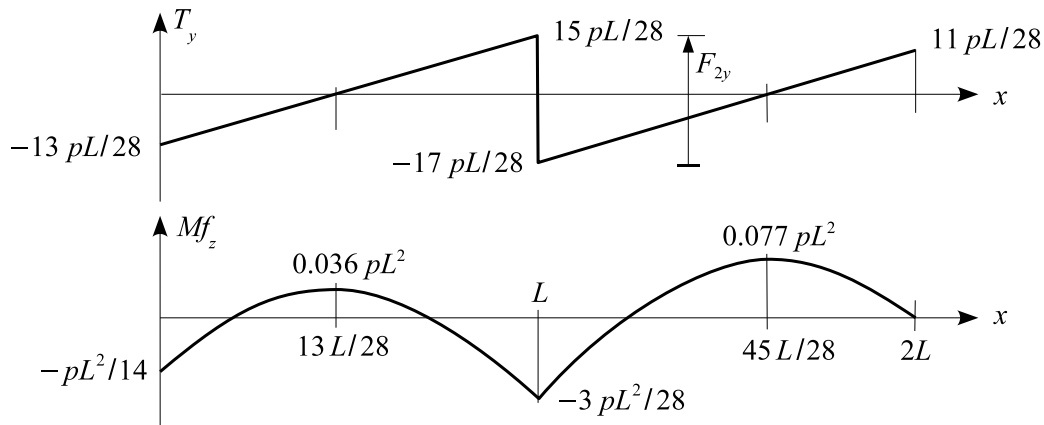
L'effort tranchant s'annule pour $x_m = 13L/28$ d'où $Mf_z(x_m) = 57pL^2/1568 \simeq 0.036pL^2$.

– élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{1}{28} \begin{Bmatrix} 17pL \\ 3pL^2 \\ 11pL \\ 0 \end{Bmatrix} = F_{3y}$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = 17L/28$ d'où $Mf_z(x_m) = 121pL^2/1568 \simeq 0.077pL^2$.

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

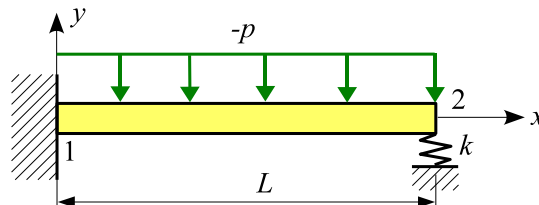
$$\max(|Mf_z(x)|) = 3pL^2/28$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

$$W_{el.z} > \frac{3}{28} \frac{pL^2}{\sigma_E} = \frac{3 \times 15 \times 600^2}{28 \times 300} = 1929 \text{ mm}^3 = 1.93 \text{ cm}^3$$

MEF_FLE_9 : appui élastique

La poutre droite représentée sur la figure est encastree en 1 et repose sur un appui élastique de raideur k en 2. Soient E le module de Young du matériau et I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre porte sur toute sa longueur une force répartie d'intensité linéique $-p$ avec $p > 0$.

1. Calculer les déplacements inconnus et les actions de liaison.

2. La poutre est un carré plein de côté c . On donne :

$$L = 800 \text{ mm} , c = 50 \text{ mm} , E = 210000 \text{ MPa} , p = 10 \text{ N/mm} , k = 20000 \text{ N/mm}$$

Solution

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = ? \\ \theta_{z2} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = -kv_2 \\ M_{2z} = 0 \end{Bmatrix} + \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation :

$$\left(\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$v_2 = -\frac{pL^4}{8EI_z} \frac{1}{1+C/3} , \quad \theta_{z2} = -\frac{pL^3}{6EI_z} \frac{1-C/24}{1+C/3} , \quad C = \frac{kL^3}{EI_z}$$

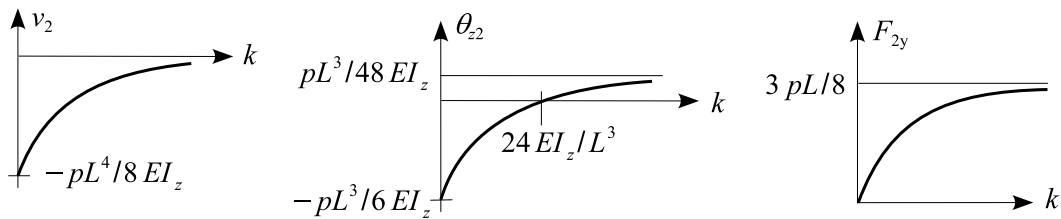
Remarque : la rotation de la section 2 est nulle pour $C = 24$ soit :

$$k = 24 \frac{EI_z}{L^3}$$

Les actions de liaisons sont :

$$F_{1y} = pL \frac{1+5C/24}{1+C/3} \quad M_{1z} = \frac{pL^2}{2} \frac{1+C/12}{1+C/3} , \quad F_{2y} = -kv_2 = \frac{pL}{8} \frac{C}{1+C/3}$$

La figure suivante représente la variation de v_2 , θ_{z2} et F_{2y} en fonction de k .

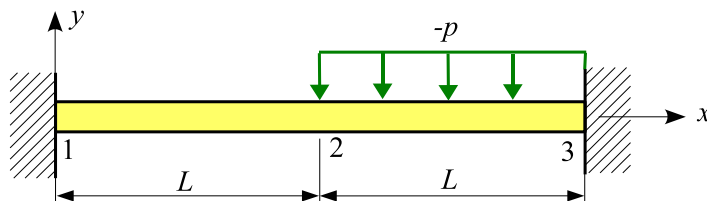


Application numérique :

$$v_2 = -1.453 \cdot 10^{-1} \text{ mm} , \quad \theta_{z2} = 7.027 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

MEF_FLE_10

La poutre droite représentée sur la figure est encastree en 1 et 3. Elle est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Soit I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre porte entre les nœuds 2 et 3 une force uniformément répartie. Soit $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$ la force par unité de longueur.

1. Calculer les déplacements nœaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nœaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Application numérique :

$$\sigma_E = 300 \text{ MPa} , L = 30 \text{ cm} , p = 2500 \text{ daN/m}$$

La poutre est un rond plein de diamètre D . Calculer D .

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nœd}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = ? \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = 0 \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$v_2 = -\frac{1}{48} \frac{pL^4}{EI_z} , \quad \theta_{z2} = -\frac{1}{96} \frac{pL^3}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nœd},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = \frac{3}{16} pL , \quad M_{1z} = \frac{5}{48} pL^2 , \quad F_{3y} = \frac{13}{16} pL , \quad M_{3z} = -\frac{11}{48} pL^2$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - pL = pL \left(\frac{3}{16} + 0 + \frac{13}{16} - 1 \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - \frac{3}{2} pL^2 = pL^2 \left(\frac{5}{48} + 0 - \frac{11}{48} + 0 + \frac{26}{16} - \frac{3}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

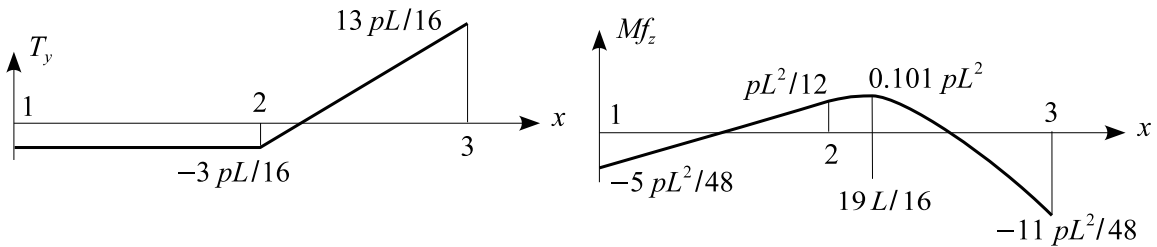
$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3pL/16 \\ 5pL^2/48 \\ -3pL/16 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix} \begin{matrix} = F_{1y} \\ = M_{1z} \end{matrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3pL/16 \\ -pL^2/12 \\ 13pL/16 \\ -11pL^2/48 \end{Bmatrix} \begin{matrix} = F_{3y} \\ = M_{3z} \end{matrix}$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = 3L/16$ d'où $Mf_z(x_m) = 155pL^2/1536 \simeq 0.101pL^2$.

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

$$\max(|Mf_z(x)|) = 11pL^2/48$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

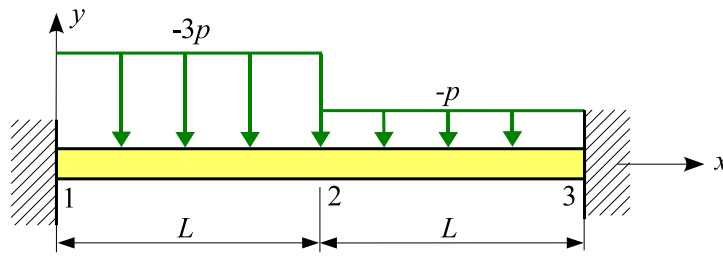
$$W_{el.z} = \frac{\pi D^3}{32} > \frac{11pL^2}{48\sigma_E}$$

d'où :

$$D^3 > \frac{22pL^2}{3\pi\sigma_E} = \frac{22 \times 25 \times 300^2}{3 \times \pi \times 300} \quad , \quad D > 25.97 \text{ mm}$$

MEF_FLE_11

La poutre droite représentée sur la figure est encastree en 1 et 3. Elle est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Soit I_z le moment quadratique de la section droite.



La poutre porte entre les nœuds 1 et 2 une force uniformément répartie d'intensité $(0, -3p, 0)$ et entre les nœuds 2 et 3 une force uniformément répartie d'intensité $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Application numérique : $\sigma_E = 230 \text{ MPa}$, $L = 1.2 \text{ m}$, $p = 3000 \text{ daN/m}$. Calculer le module de résistance à la flexion $W_{el,z}$.

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = ? \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = 0 \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = ? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -3pL/2 \\ -pL^2/4 \\ -2pL \\ pL^2/6 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2pL \\ pL^2/6 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$v_2 = -\frac{1}{12} \frac{pL^4}{EI_z} , \quad \theta_{z2} = \frac{1}{48} \frac{pL^3}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -3pL/2 \\ -pL^2/4 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = \frac{21}{8} pL , \quad M_{1z} = \frac{19}{24} pL^2 , \quad F_{3y} = \frac{11}{8} pL , \quad M_{3z} = -\frac{13}{24} pL^2$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - 4pL = pL \left(\frac{21}{8} + 0 + \frac{11}{8} - 4 \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - \frac{3}{2}pL^2 - \frac{3}{2}pL^2 = pL^2 \left(\frac{19}{24} + 0 - \frac{13}{24} + 0 + \frac{22}{8} - 3 \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

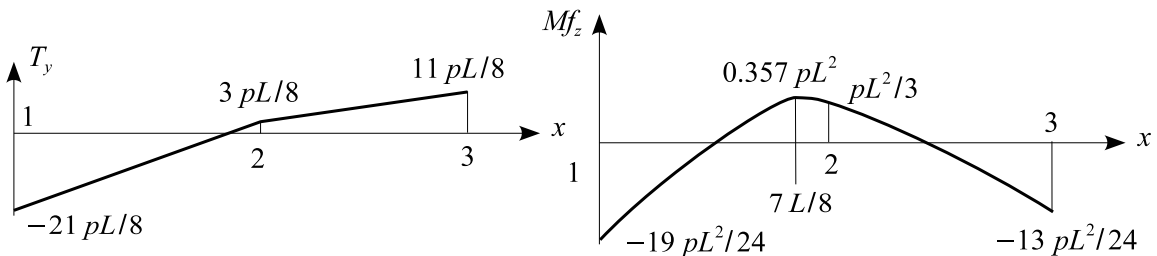
$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{4} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21pL/8 \\ 19pL^2/24 \\ 3pL/8 \\ pL^2/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix}$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = 7L/8$ d'où $Mf_z(x_m) = 137pL^2/384 \simeq 0.357pL^2$.

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \\ -12 & -6L \\ 6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3pL/8 \\ -pL^2/3 \\ 11pL/8 \\ -13pL^2/24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix}$$

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

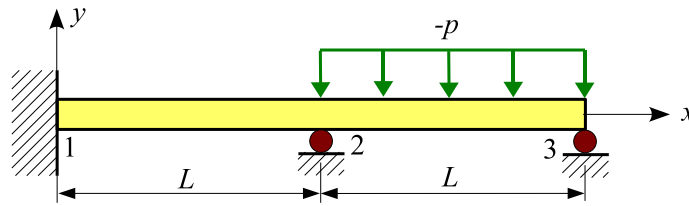
$$\max(|Mf_z(x)|) = 19pL^2/24$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

$$W_{el.z} > \frac{19pL^2}{24\sigma_E} = \frac{19 \times 30 \times 1200^2}{24 \times 230} \quad , \quad W_{el.z} > 148696 \text{ mm}^3 = 148.7 \text{ cm}^3$$

MEF_FLE_12

La poutre droite représentée sur la figure est en acier de module de Young E et de limite élastique σ_E . Soit I_z le moment quadratique de la section droite. La poutre est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2 et 3.



La poutre porte sur le tronçon 2 – 3 une force uniformément répartie. Soit $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$ la force par unité de longueur.

1. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.
2. Pour chaque élément, calculer les efforts nodaux.
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Déterminer la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
4. Application numérique :

$$\sigma_E = 300 \text{ MPa} , L = 100 \text{ cm} , p = 1500 \text{ daN/m}$$

La poutre a une section carrée de côté c . Calculer c .

Solution

Assemblage

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} = ? \\ v_3 = 0 \\ \theta_{z3} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = ? \\ M_{1z} = ? \\ F_{2y} = ? \\ M_{2z} = 0 \\ F_{3y} = ? \\ M_{3z} = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{Bmatrix}$$

Calcul des déplacements inconnus et des actions de liaisons

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -L \\ L \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$\theta_{z2} = -\frac{1}{56} \frac{pL^3}{EI_z} , \quad \theta_{z3} = \frac{5}{168} \frac{pL^3}{EI_z}$$

Les actions de liaison sont les solutions de $[K_{PL}] \{U_L\} = \{F_{\text{nod},P}\} + \{F_P\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ -pL/2 \end{Bmatrix}$$

d'où :

$$F_{1y} = -\frac{3}{28} pL \quad , \quad M_{1z} = -\frac{1}{28} pL^2 \quad , \quad F_{2y} = \frac{19}{28} pL \quad , \quad F_{3y} = \frac{3}{7} pL$$

L'équilibre de la poutre est vérifié :

$$\begin{cases} F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - pL = pL \left(-\frac{3}{28} + \frac{19}{28} + \frac{3}{7} - 1 \right) = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + LF_{2y} + 2LF_{3y} - \frac{3}{2} pL^2 = pL^2 \left(-\frac{1}{28} + 0 + 0 + \frac{19}{28} + \frac{6}{7} - \frac{3}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Calcul des efforts élémentaires et représentations graphiques

Les efforts élémentaires sont :

– élément 1-2 :

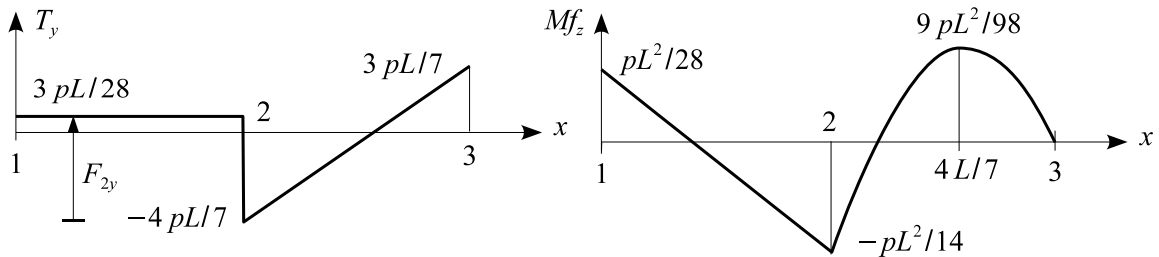
$$\begin{Bmatrix} -T_{y1} \\ -Mf_{z1} \\ T_{y2} \\ Mf_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \{\theta_{z2}\} = \begin{Bmatrix} -3pL/28 \\ -pL^2/28 \\ 3pL/28 \\ -pL^2/14 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix}$$

– élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} -T_{y2} \\ -Mf_{z2} \\ T_{y3} \\ Mf_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} - \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4pL/7 \\ pL^2/14 \\ 3pL/7 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{3y} \end{Bmatrix}$$

L'effort tranchant s'annule pour $x_m = 4L/7$ d'où $Mf_z(x_m) = 9pL^2/98$.

L'effort tranchant $T_y(x)$ et le moment fléchissant $Mf_z(x)$ sont représentés sur la figure ci-dessous.



Dimensionnement

Le moment fléchissant maximal est :

$$\max(|Mf_z(x)|) = 9pL^2/98$$

Le dimensionnement en contrainte s'écrit donc :

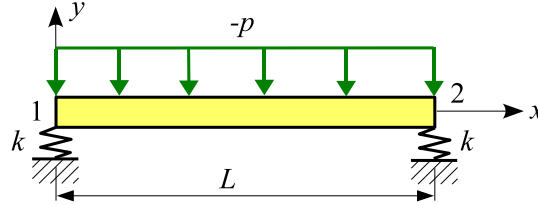
$$W_{el.z} = \frac{c^3}{6} > \frac{9pL^2}{98\sigma_E}$$

d'où :

$$c^3 > \frac{27pL^2}{49\sigma_E} = \frac{27 \times 15 \times 1000^2}{49 \times 300} \quad , \quad c > 30.20 \text{ mm}$$

MEF_FLE_13 : appui élastique

La poutre droite représentée sur la figure, de module de Young E et de moment quadratique I_z , repose sur un appui élastique de raideur k en 1 et 2.



Elle porte sur toute sa longueur une force répartie d'intensité linéique $-p$ avec $p > 0$.

1. Calculer les déplacements nodaux.
2. Application numérique.

$L = 1 \text{ m}$, $E = 200000 \text{ MPa}$, $k = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, $p = 15000 \text{ N/m}$
 La poutre est un carré plein de côté $c = 50 \text{ mm}$.

Calculer v_1 , v_2 , θ_{1z} et θ_{2z} .

Solution

L'assemblage conduit à la relation $[K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} = -kv_1 \\ M_{1z} = 0 \\ F_{2y} = -kv_2 \\ M_{2z} = 0 \end{Bmatrix} + \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix}$$

La symétrie du système implique :

$$v_1 = v_2 \quad , \quad \theta_{z1} = -\theta_{z2}$$

d'où les déplacements :

$$v_1 = v_2 = -\frac{pL}{2k} = \frac{15000 \times 1}{2 \times 2 \cdot 10^6} = -3.75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_{z1} = -\theta_{z2} = -\frac{1}{24} \frac{pL^3}{EI_z} = -\frac{15 \times 1000^3}{14 \times 200000 \times (50^4/12)} = -6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Chapitre 3

Méthodes énergétiques : poutres

3.1 Rappels

3.1.1 Expression de l'énergie de déformation en fonction des forces appliquées : formule de Clapeyron

Soit un solide soumis au système de charges $\{F\}$. $\{U\}$ est le vecteur déplacement associé à $\{F\}$. Si le comportement du matériau est élastique et linéaire, l'énergie de déformation du solide est :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \{F\}^T \{U\} \\ &= \frac{1}{2} \{F\}^T [C] \{F\} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

où :

$[C]$ est la matrice de souplesse ou matrice de flexibilité.

$[K]$ est la matrice de rigidité.

et :

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad , \quad \{U\} = [C] \{F\} \quad , \quad [K] = [C]^{-1} \quad (3.1.2)$$

Remarque : l'énergie de déformation s'exprime en joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$).

3.1.2 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Si un solide est soumis à deux systèmes de forces $\{F\}$ et $\{F'\}$, le travail de $\{F\}$ quand on applique $\{F'\}$ est égal au travail de $\{F'\}$ quand on applique $\{F\}$.

On en déduit :

$$[C] = [C]^T \quad , \quad [K] = [K]^T \quad (3.1.3)$$

La matrice de flexibilité et la matrice de rigidité sont symétriques.

3.1.3 Théorème de Castigliano

L'énergie de déformation E_{def} étant exprimée en fonction des forces appliquées $\{F\}$, le déplacement U_i de la composante F_i est égal à la dérivée de E_{def} par rapport à F_i :

$$U_i = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_i} \quad (3.1.4)$$

3.1.4 Théorème de Ménabréa

Soit un **système hyperstatique**. Si r est le nombre de réactions d'appui et p le nombre d'équations fournies par la statique, le degré d'hyperstaticité est égal au nombre $n = r - p$ de réactions surabondantes (inconnues hyperstatiques).

Les valeurs que prennent les inconnues hyperstatiques $R_{i=1,\dots,n}$ rendent stationnaire l'énergie de déformation :

$$\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial R_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.5)$$

3.1.5 Énergie de déformation d'une poutre

L'énergie de déformation emmagasinée dans un tronçon de poutre de longueur dx est égale à :

$$\begin{aligned} dE_{\text{def}} = & \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{effort normal}) \\ & + \frac{Mf_z^2}{2EI_z} dx + \frac{T_y^2}{2GAk_y} dx \quad (\text{flexion dans le plan } \{x, y\}) \\ & + \frac{Mf_y^2}{2EI_y} dx + \frac{T_z^2}{2GAk_z} dx \quad (\text{flexion dans le plan } \{x, z\}) \\ & + \frac{M_t^2}{2GJ} dx \quad (\text{torsion}) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{matériau isotrope}) \quad (3.1.7)$$

où :

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

A est l'aire de la section.

J est la constante de torsion de Saint-Venant.

I_y et I_z sont les moments quadratiques centraux principaux de la section.

k_y et k_z sont les coefficients de cisaillement.

N est l'effort normal.

Mf_y et Mf_z sont les moments fléchissants.

T_y et T_z sont les efforts tranchants.

Mt est le moment de torsion.

3.1.6 Formules mathématiques utiles

– Identité remarquable :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (3.1.8)$$

– Si u est une fonction de x :

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (3.1.9)$$

$$\sin'(u) = \cos(u) u' \quad , \quad \cos'(u) = -\sin(u) u' \quad (3.1.10)$$

On en déduit :

$$\int_0^L (L-x)^n dx = \left[-\frac{(L-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^L = \frac{L^{n+1}}{n+1} \quad (3.1.11)$$

– Relations trigonométriques :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad , \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad , \quad \cos \theta \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (3.1.12)$$

– L'inverse d'une matrice carrée $[M]$ de dimension 2 :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (3.1.13a)$$

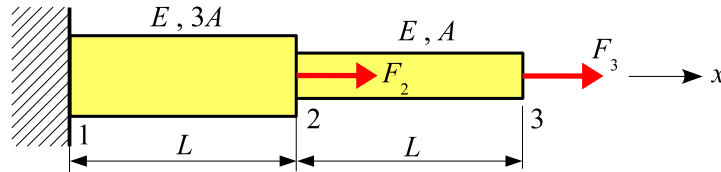
est :

$$[M]^{-1} = \frac{1}{\det [M]} \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix} \quad , \quad \det [M] = M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21} \quad (3.1.13b)$$

3.2 Exercices

ENER_1

La poutre représentée sur la figure est encastree en 1. Soit E le module de Young du matériau. L'aire de la section droite est $3A$ entre les sections 1 et 2 et A entre les sections 2 et 3.



Elle porte en 2 une force de composantes $(F_2, 0, 0)$ et en 3 une force de composantes $(F_3, 0, 0)$.

1. Expression de l'effort normal $N(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer les déplacements u_2 et u_3 des sections 2 et 3.
4. En déduire les matrices de flexibilité et de rigidité de la poutre.

Solution

L'effort normal est égal à :

$$N_{12} = F_2 + F_3 \quad , \quad N_{23} = F_3$$

d'où l'énergie de déformation :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{6EA} \int_0^L (F_2 + F_3)^2 dx + \frac{1}{2EA} \int_L^{2L} F_3^2 dx = \frac{L}{6EA} (F_2^2 + 4F_3^2 + 2F_2F_3)$$

et le déplacement horizontal des sections 2 et 3 :

$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_2} = \frac{L}{3EA} (F_2 + F_3) \quad , \quad u_3 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_3} = \frac{L}{3EA} (F_2 + 4F_3)$$

On en déduit la matrice de flexibilité :

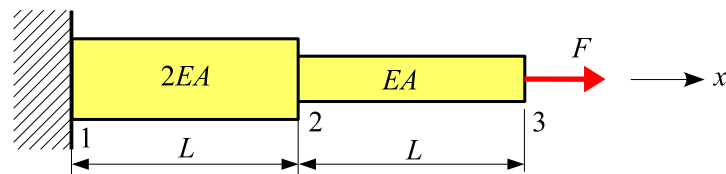
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{3EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

et la matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[K]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

ENER.2

La poutre représentée sur la figure est encastree en 1. Soit E le module de Young du matériau. L'aire de la section droite est $2A$ entre les sections 1 et 2 et A entre les sections 2 et 3.



Elle porte en 3 une force de composantes $(F, 0, 0)$.

1. Expression de l'effort normal $N(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer le déplacement u_3 de la section 3.
4. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.

Solution

Déplacement de la section 3

L'effort normal est égal à :

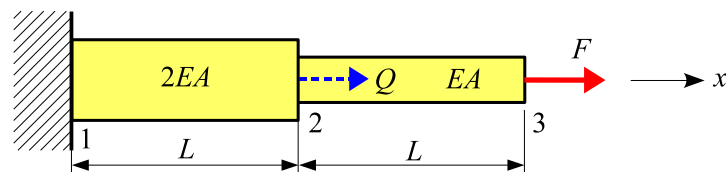
$$N(x) = F$$

d'où l'énergie de déformation :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{4EA} \int_0^L F^2 dx + \frac{1}{2EA} \int_0^L F^2 dx = \frac{3F^2L}{4EA}$$

et le déplacement horizontal de la section 3 :

$$u_3 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{3FL}{2EA}$$



Déplacement de la section 2

Introduisons une force auxiliaire Q en 2. L'effort normal est alors égal à :

$$N_{12} = F + Q \quad , \quad N_{23} = F$$

d'où :

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial Q} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N_{23}}{\partial Q} = 0$$

L'énergie de déformation est égale à :

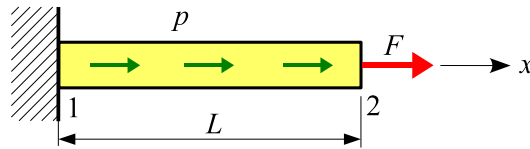
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{4EA} \int_0^L N_{12}^2 dx + \frac{1}{2EA} \int_0^L N_{23}^2 dx$$

d'où le déplacement horizontal de la section 2 :

$$u_2 = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \frac{1}{2EA} \int_0^L N_{12} \frac{\partial N_{12}}{\partial Q} dx \Big|_{Q=0} = \frac{1}{2EA} \int_0^L F dx = \frac{FL}{2EA}$$

ENER_3

La poutre représentée sur la figure est encastree en 1. Soient A l'aire de la section droite et E le module de Young du matériau.



La poutre porte en 2 une force de composantes $(F, 0, 0)$ et sur toute sa longueur, une force uniformément répartie d'intensité linéique p .

1. Expression de l'effort normal $N(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.
4. Calculer le déplacement $u(x)$ de la section d'abscisse x .

Solution

Déplacement de la section 2

L'effort normal est égal à :

$$N(x) = F + p(L - x)$$

d'où :

$$\frac{\partial N}{\partial F} = 1$$

L'énergie de déformation de la poutre est :

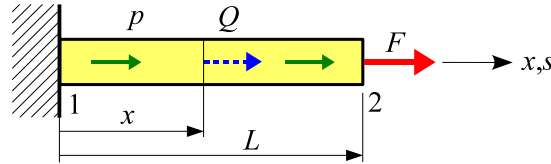
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2 dx$$

d'où le déplacement horizontal de la section 2 :

$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{1}{EA} \int_0^L N \frac{\partial N}{\partial F} dx = \frac{F}{EA} \int_0^L dx + \frac{p}{EA} \int_0^L (L - x) dx = \frac{FL}{EA} + \frac{pL^2}{2EA}$$

Déplacement de la section d'abscisse x

Introduisons une force auxiliaire Q dans la section d'abscisse x .



L'effort normal est alors égal à :

$$N = \begin{cases} F + Q + p(L - s) & 0 < s < x \\ F + p(L - s) & x < s < L \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{\partial N}{\partial Q} = \begin{cases} 1 & 0 < s < x \\ 0 & x < s < L \end{cases}$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^x N^2 ds + \frac{1}{2EA} \int_x^L N^2 ds$$

d'où le déplacement horizontal de la section d'abscisse x :

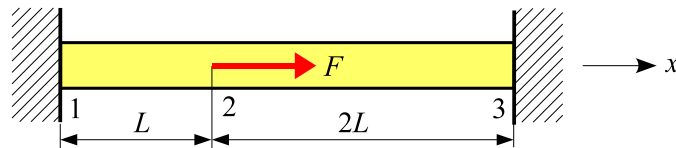
$$u(x) = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \frac{1}{EA} \int_0^x N \frac{\partial N}{\partial Q} ds \Big|_{Q=0} = \frac{1}{EA} \int_0^x (F + p(L - s)) ds$$

soit :

$$u(x) = \frac{Fx}{EA} + \frac{px}{2EA} (2L - x)$$

ENER_4

La représentée sur la figure est encastree en 1 et 2. Soient A l'aire de la section droite et E le module de Young du matériau.



Elle porte en 2 une force de composantes $(F, 0, 0)$.

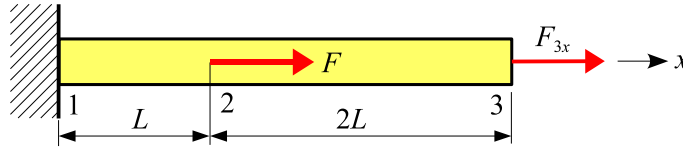
1. Écrire l'équation d'équilibre.
2. Calculer les actions de liaisons.
3. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.

Solution

L'équilibre de la poutre s'écrit :

$$F_{1x} + F_{3x} + F = 0$$

où F_{1x} et F_{3x} sont les réactions d'appui. Le système est donc hyperstatique d'ordre 1. Le système isostatique associé est représenté sur la figure ci-dessous.



F_{3x} est l'inconnue hyperstatique.

L'effort normal est égal à :

$$N_{12} = F + F_{3x} \quad , \quad N_{23} = F_{3x}$$

d'où :

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial F_{3x}} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N_{23}}{\partial F_{3x}} = 1$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^L N_{12}^2 dx + \frac{1}{2EA} \int_0^{2L} N_{23}^2 dx$$

L'inconnue hyperstatique est solution de l'équation (théorème de Ménabréa) :

$$\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_{3x}} = 0$$

d'où :

$$\frac{1}{EA} \int_0^L N_{12} \frac{\partial N_{12}}{\partial F_{3x}} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{2L} N_{23} \frac{\partial N_{23}}{\partial F_{3x}} dx = 0$$

soit :

$$(F + F_{3x}) L + F_{3x} 2L = 0$$

On en déduit l'inconnue hyperstatique F_{3x} :

$$F_{3x} = -\frac{1}{3} F$$

et l'action de liaison F_{1x} :

$$F_{1x} = -F - F_{3x} = -\frac{2}{3} F$$

d'où :

$$N_{12} = \frac{2}{3} F \quad , \quad N_{23} = -\frac{1}{3} F$$

L'énergie de déformation est égale à :

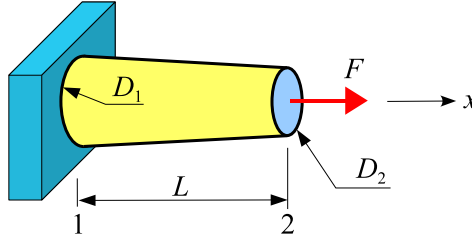
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^L \frac{4}{9} F^2 dx + \frac{1}{2EA} \int_0^{2L} \frac{1}{9} F^2 dx = \frac{F^2 L}{3EA}$$

d'où le déplacement horizontal de la section 2 :

$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{2}{3} \frac{FL}{EA}$$

ENER_5 : élément de poutre de section variable

La poutre représentée sur la figure est un rond plein dont le diamètre varie linéairement entre D_1 et D_2 . La section 1 est encastree. Soit E le module de Young du matériau.



La section 2 porte une force de composantes $(F, 0, 0)$.

1. Calculer l'énergie de déformation.
2. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.
3. En déduire la matrice de rigidité de l'élément de poutre 1 – 2.

Solution**Déplacement de la section 2**

L'effort normal dans la poutre est :

$$N(x) = F$$

L'énergie de déformation est :

$$E_{\text{def}} = \int_0^L \frac{F^2}{2EA} dx \quad , \quad A = \frac{\pi}{4} \left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) D_1 + \frac{x}{L} D_2 \right)^2$$

d'où le déplacement de la section 2 :

$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{F}{E} \int_0^L \frac{1}{A} dx = \frac{4F}{\pi E} \left[\frac{-L}{D_2 - D_1} \frac{1}{\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) D_1 + \frac{x}{L} D_2 \right)} \right]_0^L$$

soit :

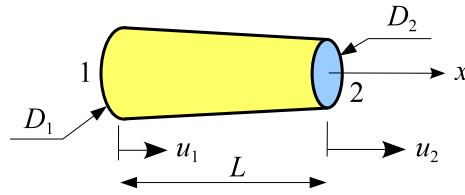
$$u_2 = \frac{4FL}{\pi E D_1 D_2}$$

On en déduit :

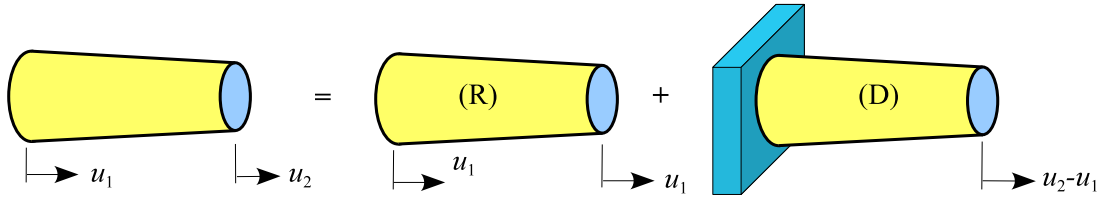
$$F = \tilde{k} u_2 \quad , \quad \tilde{k} = \frac{\pi E D_1 D_2}{4L}$$

Matrice de rigidité de l'élément 1 – 2

Considérons l'élément 1 – 2 (figure ci-dessous) dont les déplacements nœuds sont u_1 et u_2 .



Décomposons le mouvement de cet élément en un mouvement de corps rigide (R) et un mouvement avec déformation (D) :



L'énergie de déformation de l'élément est :

$$E_{\text{def}} = \underbrace{E_{\text{def}}(R)}_{=0} + E_{\text{def}}(D)$$

d'où :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} = \frac{1}{2} \tilde{k} (u_2 - u_1)^2$$

La quantité $u_2 - u_1$ s'écrit :

$$u_2 - u_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{u\}$$

d'où l'énergie de déformation :

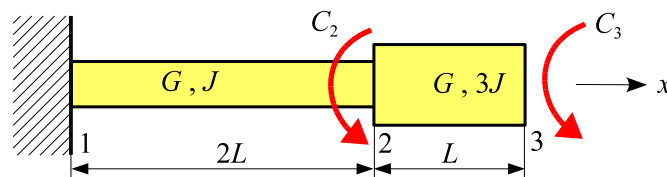
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T \tilde{k} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[k]} \{u\}$$

et la matrice de rigidité :

$$[k] = \frac{\pi E D_1 D_2}{4 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ENER_6

On considère la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soit G le module d'élasticité transversal du matériau. La constante de torsion est J entre les sections 1 et 2 et $3J$ entre les sections 2 et 3.



La section 1 est encastée. Les sections 2 et 3 portent un couple de torsion d'intensités respectives C_2 et C_3 .

1. Expression du moment de torsion $M_t(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer les rotations θ_{x2} et θ_{x3} des sections 2 et 3.
4. En déduire les matrices de flexibilité et de rigidité de la poutre.

Solution

Le moment de torsion dans la poutre est :

$$M_{t12} = C_2 + C_3 \quad , \quad M_{t23} = C_3$$

d'où l'énergie de déformation :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2GJ} \int_0^{2L} M_{t12}^2 dx + \frac{1}{6GJ} \int_0^L M_{t23}^2 dx = \frac{L}{6GJ} (6C_2^2 + 7C_3^2 + 12C_2C_3)$$

et la rotation des sections 2 et 3 :

$$\theta_{x2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_2} = \frac{2L}{GJ} (C_2 + C_3) \quad , \quad \theta_{x3} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_3} = \frac{L}{3GJ} (6C_2 + 7C_3)$$

On en déduit la matrice de flexibilité :

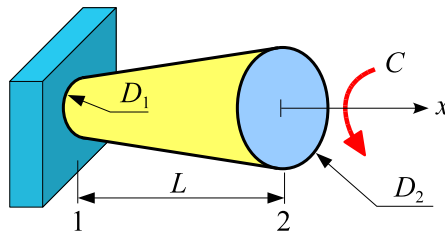
$$\begin{Bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{3GJ} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}$$

et la matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{GJ}{2L} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}}_{[K]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{x3} \end{Bmatrix}$$

ENER_7 : élément de poutre de section variable

La poutre représentée sur la figure est un rond plein dont le diamètre varie linéairement entre D_1 et D_2 . La section 1 est encastree. Soit G le module d'élasticité transversal du matériau.



La section 2 porte un couple de composantes $(C, 0, 0)$.

1. Calculer l'énergie de déformation.
2. Calculer la rotation θ_{x2} de la section 2.
3. En déduire la matrice de rigidité de l'élément de poutre 1 – 2.

Solution**Rotation de la section 2**

Le moment de torsion dans la poutre est :

$$M_t(x) = C$$

L'énergie de déformation est :

$$E_{\text{def}} = \int_0^L \frac{C^2}{2GJ} dx \quad , \quad J = \frac{\pi}{32} \left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) D_1 + \frac{x}{L} D_2 \right)^4$$

d'où la rotation de la section 2 :

$$\theta_{x2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{C}{G} \int_0^L \frac{1}{J} dx = \frac{32C}{\pi G} \left[-\frac{L}{3(D_2 - D_1)} \frac{1}{\left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) D_1 + \frac{x}{L} D_2 \right)^3} \right]_0^L$$

soit :

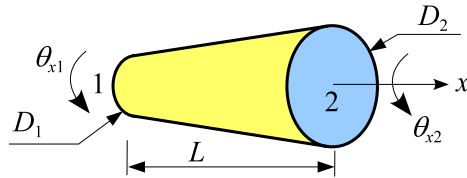
$$\theta_{x2} = \frac{32CL}{3\pi G} \frac{D_1^2 - D_1 D_2 + D_2^2}{D_1^3 D_2^3}$$

On en déduit :

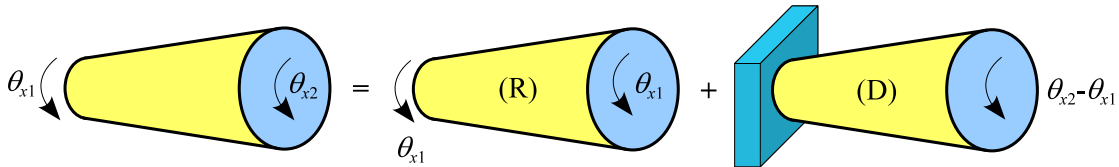
$$C = \tilde{k} \theta_{x2} \quad , \quad \tilde{k} = \frac{3\pi G}{32L} \frac{D_1^3 D_2^3}{D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2}$$

Matrice de rigidité de l'élément 1 – 2

Considérons l'élément 1 – 2 (figure ci-dessous) dont les déplacements nodaux sont θ_{x1} et θ_{x2} .



Décomposons le mouvement de cet élément en un mouvement de corps rigide (R) et un mouvement avec déformation (D) :



L'énergie de déformation de l'élément est :

$$E_{\text{def}} = \underbrace{E_{\text{def}}(R)}_{=0} + E_{\text{def}}(D)$$

d'où :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} = \frac{1}{2} \tilde{k} (\theta_{x2} - \theta_{x1})^2$$

La quantité $\theta_{x2} - \theta_{x1}$ s'écrit :

$$\theta_{x2} - \theta_{x1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{u\}$$

d'où l'énergie de déformation :

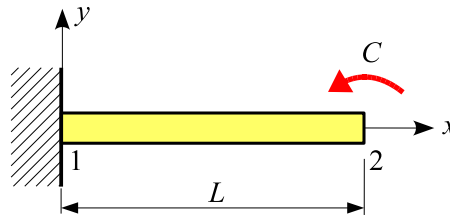
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\tilde{k} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[k]} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{u\}$$

et la matrice de rigidité :

$$[k] = \frac{3\pi G}{32L} \frac{D_1^3 D_2^3}{D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ENER_8

La poutre 1 – 2 de longueur L et de section constante (moment quadratique : I_z) est encastrée en 1. Elle est en acier de module de Young E . Elle porte en 2 un couple ponctuel de composantes $(0, 0, C)$.



On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

1. Expression du moment fléchissant $M_f^z(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.
4. Calculer le déplacement v_2 de la section 2.

Solution

Rotation de la section 2

Le moment fléchissant dans la poutre est C , d'où l'énergie de déformation :

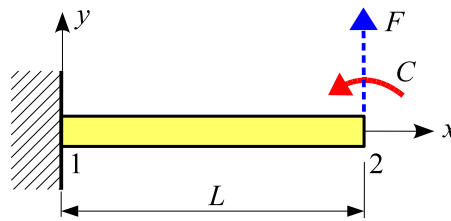
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L C^2 dx = \frac{C^2 L}{2EI_z}$$

et la pente en 2 :

$$\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{CL}{EI_z}$$

Déplacement vertical de la section 2

Introduisons en 2 une force auxiliaire $(0, F, 0)$.



Le moment fléchissant est alors égal à :

$$Mf_z(x) = C + F(L - x)$$

d'où :

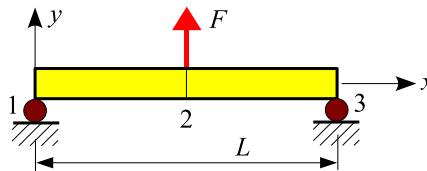
$$\frac{\partial Mf_z}{\partial F} = L - x$$

La flèche en 2 est égale à :

$$v_2 = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} \right|_{F=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F} dx \Big|_{F=0} = \frac{C}{EI_z} \int_0^L (L - x) dx = \frac{CL^2}{2EI_z}$$

ENER_9

La poutre 1 – 2 – 3 de longueur L et de section constante (moment quadratique : I_z) repose en 1 et 3 sur un appui simple. Elle est en acier de module de Young E . Elle porte en son milieu 2 une force de composantes $(0, F, 0)$.



On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

1. Expression du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer la flèche en 2.

Solution

Le moment fléchissant dans la poutre est :

$$Mf_z(1-2) = \frac{F}{2}x \quad , \quad Mf_z(2-3) = \frac{F}{2}(L-x)$$

L'énergie de déformation est égale à :

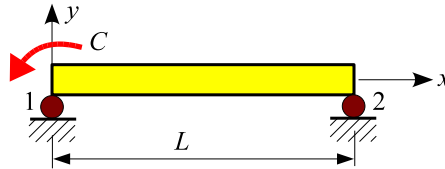
$$E_{\text{def}} = 2 E_{\text{def}}(1-2) = \frac{1}{2EI_z} \int_0^{L/2} \frac{F^2}{4} x^2 dx = \frac{F^2 L^3}{96EI_z}$$

d'où la flèche en 2 :

$$v_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{FL^3}{48EI_z}$$

ENER_10

La poutre 1 – 2 de longueur L et de section constante (moment quadratique : I_z) repose en 1 et 2 sur un appui simple. Elle est en acier de module de Young E . Elle porte en 1 un couple de composantes $(0, 0, C)$.



On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

1. Expression du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer la rotation θ_{z1} de la section 1.
4. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.

Solution**Rotation de la section 1**

Le moment fléchissant est égal à :

$$Mf_z(x) = -C \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial C} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

L'énergie de déformation est égale à :

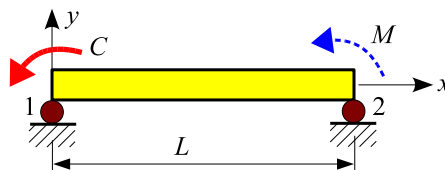
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx$$

d'où la rotation de la section 1 :

$$\theta_{z1} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx = \frac{C}{EI_z} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{CL}{3EI_z}$$

Rotation de la section 2

Introduisons un couple auxiliaire $(0, 0, M)$ en 2.



Le moment fléchissant devient :

$$Mf_z(x) = -C \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M \frac{x}{L}$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial M} = \frac{x}{L}$$

et la rotation de la section 2 :

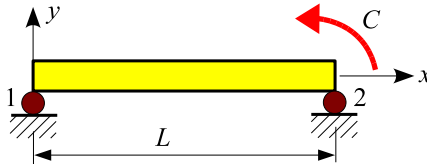
$$\theta_{z2} = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial M} \right|_{M=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial M} dx \Big|_{M=0}$$

soit :

$$\theta_{z2} = -\frac{C}{EI_z} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = -\frac{CL}{6EI_z}$$

ENER_11

La poutre 1 – 2 de longueur L et de section constante (moment quadratique : I_z) repose en 1 et 2 sur un appui simple. Elle est en acier de module de Young E . Elle porte en 2 un couple de composantes $(0, 0, C)$.



On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

1. Expression du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.
4. Calculer la rotation θ_{z1} de la section 1.

Solution

Rotation de la section 2

Le moment fléchissant est égal à :

$$Mf_z(x) = C \frac{x}{L}$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial C} = \frac{x}{L}$$

L'énergie de déformation est égale à :

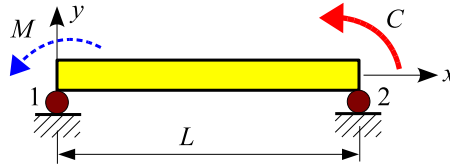
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx$$

d'où la rotation de la section 2 :

$$\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx = \frac{C}{EI_z} \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{CL}{3EI_z}$$

Rotation de la section 1

Introduisons un couple auxiliaire $(0, 0, M)$ en 1.



Le moment fléchissant devient :

$$Mf_z(x) = -M \left(1 - \frac{x}{L}\right) + C \frac{x}{L}$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial M} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

et la rotation de la section 1 :

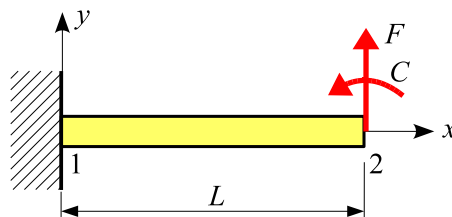
$$\theta_{z1} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial M} \Big|_{M=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial M} dx \Big|_{M=0}$$

soit :

$$\theta_{z1} = -\frac{C}{EI_z} \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = -\frac{CL}{6EI_z}$$

ENER_12

Soit la poutre (1–2) de longueur L et de section droite constante. Soient A , k_y et I_z les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.



La poutre est encastée en 1. Elle porte en 2 une force de composantes $(0, F, 0)$ et un couple de composantes $(0, 0, C)$.

1. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer les déplacements v_2 et θ_{z2} de la section 2.
3. En déduire l'expression des matrices de souplesse et de rigidité de la structure.

Solution

L'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre sont :

$$T_y(x) = F \quad , \quad Mf_z(x) = C + F(L - x)$$

d'où :

$$\frac{\partial T_y}{\partial F} = 1 \quad , \quad \frac{\partial T_y}{\partial C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial F} = L - x \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C} = 1$$

Modèle de Bernoulli

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx$$

d'où les déplacements de la section 2 :

$$v_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F} dx$$

$$\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx$$

Ces équations s'écrivent :

$$v_2 = \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L-x)^2 dx + \frac{C}{EI_z} \int_0^L (L-x) dx$$

$$\theta_{z2} = \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L-x) dx + \frac{C}{EI_z} \int_0^L dx$$

d'où :

$$v_2 = \frac{FL^3}{3EI_z} + \frac{CL^2}{2EI_z}$$

$$\theta_{z2} = \frac{FL^2}{2EI_z} + \frac{CL}{EI_z}$$

On en déduit la matrice de flexibilité :

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} F \\ C \end{Bmatrix}$$

et la matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} F \\ C \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}}_{[K]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

Modèle de Timoshenko

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx + \frac{1}{2GAk_y} \int_0^L T_y^2 dx$$

d'où les déplacements de la section 2 :

$$v_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F} dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial F} dx$$

$$\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial C} dx$$

Ces équations s'écrivent :

$$v_2 = \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L-x)^2 dx + \frac{C}{EI_z} \int_0^L (L-x) dx + \frac{F}{GAk_y} \int_0^L dx$$

$$\theta_{z2} = \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L-x) dx + \frac{C}{EI_z} \int_0^L dx$$

d'où :

$$v_2 = \frac{FL^3}{3EI_z} + \frac{CL^2}{2EI_z} + \frac{FL}{GAk_y}$$

$$\theta_{z2} = \frac{FL^2}{2EI_z} + \frac{CL}{EI_z}$$

On en déduit la matrice de flexibilité :

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2L^2 \left(1 + \frac{\phi_y}{4}\right) & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} F \\ C \end{Bmatrix}, \quad \phi_y = \frac{12EI_z}{L^2GAk_y}$$

et la matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} F \\ C \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EI_z}{L^3(1+\phi_y)} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & (4+\phi_y)L^2 \end{bmatrix}}_{[K]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

Remarque : de l'expression de $[K]$, on déduit la matrice de rigidité d'un élément de poutre pour la flexion dans le plan $\{x, y\}$ (http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/cours/flexion_xy.pdf).

ENER_13

La poutre 1 – 2 de longueur L et de section constante repose en 1 et 2 sur un appui simple. Soient A , k_y et I_z les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Elle porte en 1 un couple de composantes $(0, 0, C_1)$ et en 2 un couple de composantes $(0, 0, C_2)$.



1. Expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer les rotations θ_{z1} et θ_{z2} des sections 1 et 2.
3. En déduire l'expression de la matrice de souplesse et de la matrice de rigidité de la structure.

Solution

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont :

$$T_y(x) = -\frac{C_1 + C_2}{L} \quad , \quad Mf_z(x) = -C_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + C_2 \frac{x}{L}$$

d'où :

$$\frac{\partial T_y}{\partial C_1} = \frac{\partial T_y}{\partial C_2} = -\frac{1}{L} \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C_1} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C_2} = \frac{x}{L}$$

Modèle de Bernoulli

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx$$

d'où la rotation des sections 1 et 2 :

$$\theta_{z1} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C_1} dx$$

$$\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_2} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C_2} dx$$

Ces équations s'écrivent :

$$\theta_{z1} = \frac{C_1}{EI_z} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx - \frac{C_2}{EI_z} \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx$$

$$\theta_{z2} = -\frac{C_1}{EI_z} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx + \frac{C_2}{EI_z} \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$$

d'où :

$$\theta_{z1} = \frac{C_1 L}{3EI_z} - \frac{C_2 L}{6EI_z}$$

$$\theta_{z2} = -\frac{C_1 L}{6EI_z} + \frac{C_2 L}{3EI_z}$$

On en déduit :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

et :

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{[K]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

Modèle de Timoshenko

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx + \frac{1}{2GAk_y} \int_0^L T_y^2 dx$$

d'où la rotation des sections 1 et 2 :

$$\theta_{z1} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_1} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L M f_z \frac{\partial M f_z}{\partial C_1} dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial C_1} dx$$

$$\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_2} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L M f_z \frac{\partial M f_z}{\partial C_2} dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial C_2} dx$$

Ces équations s'écrivent :

$$\theta_{z1} = \frac{C_1}{EI_z} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx - \frac{C_2}{EI_z} \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L \frac{C_1 + C_2}{L^2} dx$$

$$\theta_{z2} = -\frac{C_1}{EI_z} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx + \frac{C_2}{EI_z} \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L \frac{C_1 + C_2}{L^2} dx$$

d'où :

$$\theta_{z1} = \frac{C_1 L}{3 EI_z} - \frac{C_2 L}{6 EI_z} + \frac{C_1 + C_2}{LGAk_y}$$

$$\theta_{z2} = -\frac{C_1 L}{6 EI_z} + \frac{C_2 L}{3 EI_z} + \frac{C_1 + C_2}{LGAk_y}$$

On en déduit la matrice de flexibilité :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}}_{[C]} = \frac{L}{6 EI_z} \begin{bmatrix} 2 + \frac{\phi_y}{2} & -1 + \frac{\phi_y}{2} \\ -1 + \frac{\phi_y}{2} & 2 + \frac{\phi_y}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad , \quad \phi_y = \frac{12 EI_z}{L^2 GAk_y}$$

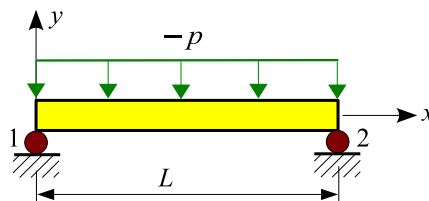
et la matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EI_z}{L(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 4 + \phi_y & 2 - \phi_y \\ 2 - \phi_y & 4 + \phi_y \end{bmatrix}}_{[K]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

Remarque : de l'expression de $[K]$, on déduit la matrice de rigidité d'un élément de poutre pour la flexion dans le plan $\{x, y\}$ (http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/cours/flexion_xy.pdf).

ENER_14

La poutre 1 – 2 de longueur L et de section constante (moment quadratique : I_z) repose en 1 et 2 sur un appui simple. Elle est en acier de module de Young E . Elle porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité linéique $(0, -p, 0)$ avec $p > 0$.

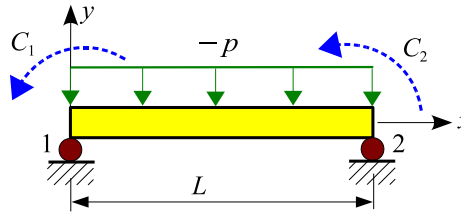


On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

Calculer les rotations θ_{z1} et θ_{z2} des sections 1 et 2.

Solution

Introduisons un couple auxiliaire $(0, 0, C_1)$ en 1 et un couple auxiliaire $(0, 0, C_2)$ en 2.



Le moment fléchissant est égal à :

$$Mf_z(x) = \frac{pL}{2} x \left(1 - \frac{x}{L}\right) - C_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + C_2 \frac{x}{L}$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial C_1} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C_2} = \frac{x}{L}$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx$$

d'où la rotation des sections 1 et 2 :

$$\theta_{z1} = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_1} \right|_{C_1=C_2=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C_1} dx \Big|_{C_1=C_2=0}$$

$$\theta_{z2} = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C_2} \right|_{C_1=C_2=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C_2} dx \Big|_{C_1=C_2=0}$$

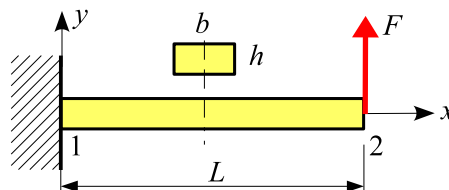
Ces équations s'écrivent :

$$\theta_{z1} = -\frac{pL}{2EI_z} \int_0^L x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = -\frac{pL^3}{24EI_z}$$

$$\theta_{z2} = \frac{pL}{2EI_z} \int_0^L x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = \frac{pL^3}{24EI_z}$$

ENER_15

La poutre (1 – 2) de longueur L et de section droite constante est encastree en 1.



Soient A , I_z et k_y les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Elle porte en 2 une force de composantes $(0, F, 0)$.

On prend en compte l'influence de l'effort tranchant : modèle de Timoshenko.

1. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer le déplacement v_2 de la section 2.
4. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.
5. La section droite est rectangulaire : $A = bh$, $I_z = \frac{bh^3}{12}$, $k_y = \frac{5}{6}$, $\nu = 0.3$

Étudier l'influence de l'effort tranchant en fonction de $L/h = 20, 10, 5, 4, 3$.

Solution

Déplacement vertical de la section 2

L'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre sont :

$$T_y(x) = F \quad , \quad Mf_z(x) = F(L - x)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T_y}{\partial F} = 1 \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial F} = L - x$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx + \frac{1}{2GAk_y} \int_0^L T_y^2 dx$$

On en déduit le déplacement vertical de la section 2 :

$$v_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F} dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial F} dx$$

soit :

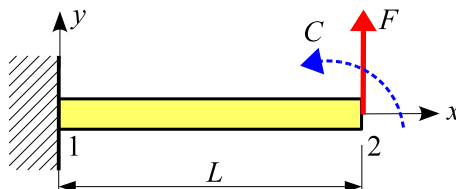
$$v_2 = \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L - x)^2 dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L F dx = \frac{FL^3}{3EI_z} + \frac{FL}{GAk_y}$$

v_2 s'écrit :

$$v_2 = \frac{FL^3}{3EI_z} \left(1 + \frac{3EI_z}{L^2GAk_y} \right) = \underbrace{\frac{FL^3}{3EI_z}}_{\text{Bernoulli}} \left(1 + \frac{\phi_y}{4} \right) \quad , \quad \phi_y = \frac{12EI_z}{L^2GAk_y}$$

Rotation de la section 2

Introduisons un couple auxiliaire C en 2.



L'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre sont :

$$T_y(x) = F \quad , \quad Mf_z(x) = F(L - x) + C$$

On en déduit :

$$\frac{\partial T_y}{\partial C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C} = 1$$

La rotation de la section 2 est :

$$\theta_{z2} = \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} \right|_{C=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx \Big|_{C=0} = \frac{FL^2}{2EI_z}$$

Application numérique

Pour une section droite rectangulaire, il vient :

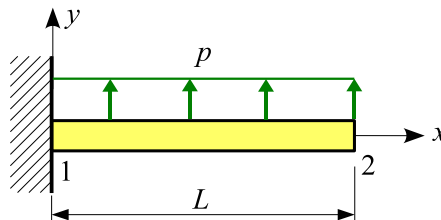
$$\phi_y = \frac{12}{5} (1 + \nu) \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

d'où la variation de ϕ_y en fonction de L/h pour $\nu = 0.3$:

L/h	20	10	5	4	3
ϕ_y	0.0078	0.0312	0.125	0.195	0.347

ENER_16

Soit la poutre (1–2) de longueur L et de section droite constante. Soient A , k_y et I_z les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.



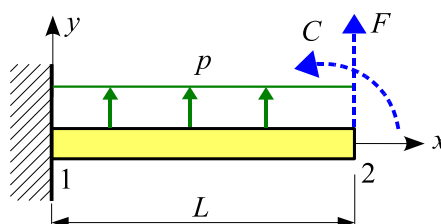
La poutre est encastree en 1. Elle porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie dont l'intensité linéique est $(0, p, 0)$.

On prend en compte l'influence de l'effort tranchant : modèle de Timoshenko.

Calculer les déplacements v_2 et θ_{z2} de la section 2.

Solution

Introduisons dans la section 2 une force auxiliaire $(0, F, 0)$ et un couple auxiliaire $(0, 0, C)$.



L'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre sont :

$$T_y(x) = F + p(L - x) \quad , \quad Mf_z(x) = C + F(L - x) + \frac{p(L - x)^2}{2}$$

d'où :

$$\frac{\partial T_y}{\partial F} = 1 \quad , \quad \frac{\partial T_y}{\partial C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial F} = L - x \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C} = 1$$

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L Mf_z^2 dx + \frac{1}{2GAk_y} \int_0^L T_y^2 dx$$

On en déduit :

– la flèche en 2 :

$$\begin{aligned} v_2 &= \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} \right|_{F=C=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F} dx \Big|_{F=C=0} + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial F} dx \Big|_{F=C=0} \\ v_2 &= \frac{p}{2EI_z} \int_0^L (L - x)^3 dx + \frac{p}{GAk_y} \int_0^L (L - x) dx \\ v_2 &= \frac{pL^4}{8EI_z} + \frac{pL^2}{2GAk_y} \end{aligned}$$

Remarque : la flèche en 2 s'écrit :

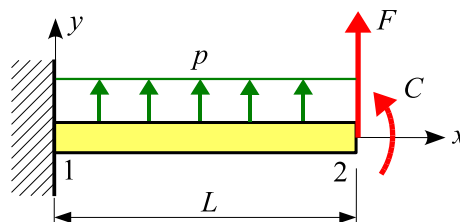
$$v_2 = \frac{pL^4}{8EI_z} \left(1 + \frac{4EI_z}{L^2GAk_y} \right) = \frac{pL^4}{8EI_z} \left(1 + \frac{\phi_y}{3} \right) \quad , \quad \phi_y = \frac{12EI_z}{L^2GAk_y}$$

– la rotation de la section 2 :

$$\begin{aligned} \theta_{z2} &= \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} \right|_{F=C=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx \Big|_{F=C=0} + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial C} dx \Big|_{F=C=0} \\ \theta_{z2} &= \frac{p}{2EI_z} \int_0^L (L - x)^2 dx \\ \theta_{z2} &= \frac{pL^3}{6EI_z} \end{aligned}$$

ENER_17

Soit la poutre (1–2) de longueur L et de section droite constante. Soient A , k_y et I_z les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.



La poutre est encastree en 1. Elle porte :

- en 2 une force de composantes $(0, F, 0)$ et un couple de composantes $(0, 0, C)$.
- sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité linéique $(0, p, 0)$.

On prend en compte l'influence de l'effort tranchant : modèle de Timoshenko.

1. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $Mf_z(x)$.
2. Calculer les déplacements v_2 et θ_{z2} de la section 2.

Solution

L'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre sont :

$$T_y(x) = F + p(L - x) \quad , \quad Mf_z(x) = C + F(L - x) + \frac{p(L - x)^2}{2}$$

d'où :

$$\frac{\partial T_y}{\partial F} = 1 \quad , \quad \frac{\partial T_y}{\partial C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial F} = L - x \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C} = 1$$

La flèche en 2 est égale à :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F} dx + \frac{1}{GAk_y} \int_0^L T_y \frac{\partial T_y}{\partial F} dx \\ &= \frac{C}{EI_z} \int_0^L (L - x) dx + \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L - x)^2 dx + \frac{p}{2EI_z} \int_0^L (L - x)^3 dx \\ &\quad + \frac{F}{GAk_y} \int_0^L dx + \frac{p}{GAk_y} \int_0^L (L - x) dx \end{aligned}$$

soit :

$$v_2 = \frac{CL^2}{2EI_z} + \frac{FL^3}{3EI_z} + \frac{pL^4}{8EI_z} + \frac{FL}{GAk_y} + \frac{pL^2}{2GAk_y}$$

Remarque : la flèche en 2 s'écrit :

$$v_2 = \frac{CL^2}{2EI_z} + \frac{FL^3}{3EI_z} \left(1 + \frac{\phi_y}{4}\right) + \frac{pL^4}{8EI_z} \left(1 + \frac{\phi_y}{3}\right) \quad , \quad \phi_y = \frac{12EI_z}{L^2GAk_y}$$

La rotation de la section 2 est :

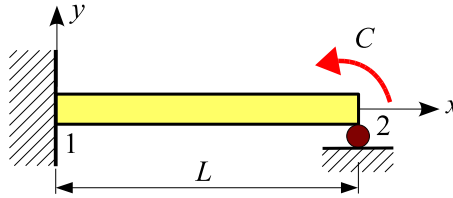
$$\begin{aligned} \theta_{z2} &= \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial C} dx \\ &= \frac{C}{EI_z} \int_0^L dx + \frac{F}{EI_z} \int_0^L (L - x) dx + \frac{p}{2EI_z} \int_0^L (L - x)^2 dx \end{aligned}$$

soit :

$$\theta_{z2} = \frac{FL^2}{2EI_z} + \frac{CL}{EI_z} + \frac{pL^3}{6EI_z}$$

ENER_18

Soit la poutre (1 – 2) de longueur L et de section droite constante. I_z est le moment quadratique de la section droite. E est le module de Young du matériau.



La poutre est encastée en 1 et repose sur un appui simple en 2. La section 2 porte un couple de composantes $(0, 0, C)$.

On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

1. Écrire les équations d'équilibre.
2. Calculer les actions de liaisons.
3. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.

Solution

Les actions de liaison sont : F_{1y} , F_{2y} et M_{1z} d'où les équations d'équilibre de la poutre :

$$F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad , \quad M_{1z} + LF_{2y} + C = 0$$

Le système est hyperstatique d'ordre 1. Le système isostatique associé est représenté sur la figure ci-dessous.



F_{2y} est l'inconnue hyperstatique.

Le moment fléchissant dans la poutre est :

$$Mf_z(x) = C + F_{2y}(L - x)$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial F_{2y}} = L - x$$

L'inconnue hyperstatique est solution de l'équation (théorème de Ménabréa) :

$$\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_{2y}} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F_{2y}} dx = 0$$

soit :

$$C \int_0^L (L-x) dx + F_{2y} \int_0^L (L-x)^2 dx = C \frac{L^2}{2} + F_{2y} \frac{L^3}{3} = 0$$

On en déduit F_{2y} :

$$F_{2y} = -\frac{3}{2} \frac{C}{L}$$

puis F_{1y} et M_{1z} à l'aide des équations d'équilibre :

$$F_{1y} = -F_{2y} \quad , \quad M_{1z} = -\frac{1}{2} C$$

Le moment fléchissant est égal à :

$$Mf_z(x) = C + F_{2y}(L-x) = \frac{C}{2L}(3x-L)$$

d'où l'énergie de déformation :

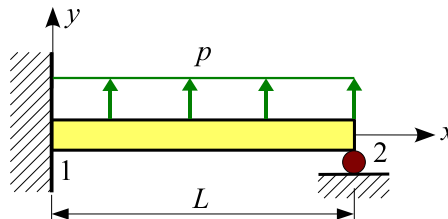
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^L \frac{C^2}{4L^2} (3x-L)^2 dx = \frac{C^2 L}{8EI_z}$$

et la rotation de la section 2 :

$$\theta_{2z} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{CL}{4EI_z}$$

ENER_19

Soit la poutre (1 – 2) de longueur L et de section droite constante. I_z est le moment quadratique de la section droite. E est le module de Young du matériau.



La poutre est encastree en 1 et repose sur un appui simple en 2. Elle porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie dont l'intensité linéique est $(0, p, 0)$.

On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

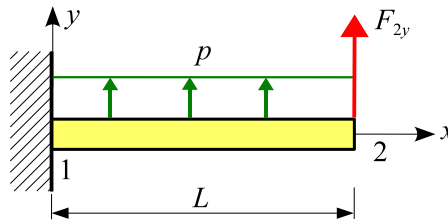
1. Écrire les équations d'équilibre.
2. Calculer les actions de liaisons.

Solution

Les actions de liaison sont : F_{1y} , F_{2y} et M_{1z} d'où les équations d'équilibre de la poutre :

$$F_{1y} + F_{2y} + pL = 0 \quad , \quad M_{1z} + LF_{2y} + \frac{1}{2} pL^2 = 0$$

Le système isostatique associé est représenté sur la figure ci-dessous.



F_{2y} est l'inconnue hyperstatique.

Le moment fléchissant dans la poutre est :

$$Mf_z(x) = F_{2y}(L - x) + p \frac{(L - x)^2}{2}$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial F_{2y}} = L - x$$

L'inconnue hyperstatique est solution de l'équation (théorème de Ménabréa) :

$$\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_{2y}} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F_{2y}} dx = 0$$

soit :

$$F_{2y} \int_0^L (L - x)^2 dx + \frac{p}{2} \int_0^L (L - x)^3 dx = F_{2y} \frac{L^3}{3} + \frac{pL^4}{8} = 0$$

On en déduit F_{2y} :

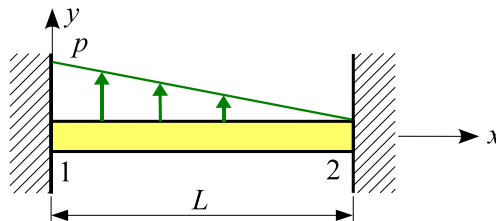
$$F_{2y} = -\frac{3}{8} pL$$

puis F_{1y} et M_{1z} à l'aide des équations d'équilibre :

$$F_{1y} = -\frac{5}{8} pL \quad , \quad M_{1z} = -\frac{1}{8} pL^2$$

ENER_20

Soit la poutre (1 – 2) de longueur L et de section droite constante. I_z est le moment quadratique de la section droite. E est le module de Young du matériau.



Les sections 1 et 2 sont encastées. Elle porte sur toute sa longueur une force répartie dont l'intensité linéique suivant y varie linéairement entre p et 0.

On néglige l'influence de l'effort tranchant : modèle de Bernoulli.

1. Écrire les équations d'équilibre.

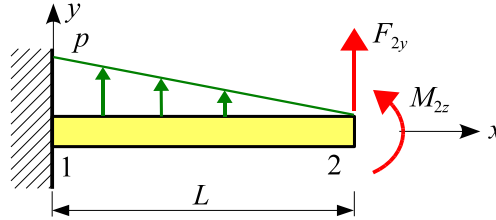
2. Calculer les actions de liaisons.

Solution

Les actions de liaison sont : F_{1y} , F_{2y} , M_{1z} et M_{2z} d'où l'équilibre de la poutre :

$$F_{1y} + F_{2y} + \frac{1}{2} pL = 0 \quad , \quad M_{1z} + M_{2z} + LF_{2y} + \frac{1}{6} pL^2 = 0$$

Le système isostatique associé est représenté sur la figure ci-dessous.



F_{2y} et M_{2z} sont les inconnues hyperstatiques.

Le moment fléchissant dans la poutre est :

$$Mf_z(x) = M_{2z} + F_{2y}(L - x) + \frac{p}{6L}(L - x)^3$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial F_{2y}} = L - x \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial M_{2z}} = 1$$

Les inconnues hyperstatiques sont les solutions des équations (théorème de Ménabréa) :

$$\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_{2y}} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F_{2y}} dx = 0 \quad , \quad \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial M_{2z}} = \frac{1}{EI_z} \int_0^L Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial M_{2z}} dx = 0$$

qui s'écrivent :

$$M_{2z} \int_0^L dx + F_{2y} \int_0^L (L - x) dx + \frac{p}{6L} \int_0^L (L - x)^3 dx = M_{2z} L + F_{2y} \frac{L^2}{2} + \frac{pL^2}{24} = 0$$

et :

$$M_{2z} \int_0^L (L - x) dx + F_{2y} \int_0^L (L - x)^2 dx + \frac{p}{6L} \int_0^L (L - x)^4 dx = M_{2z} \frac{L^2}{2} + F_{2y} \frac{L^3}{3} + \frac{pL^5}{30} = 0$$

On en déduit F_{2y} et M_{2z} :

$$F_{2y} = -\frac{3}{20} pL \quad , \quad M_{2z} = \frac{1}{30} pL^2$$

puis F_{1y} et M_{1z} à l'aide des équations d'équilibre :

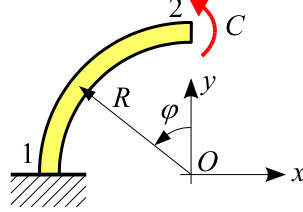
$$F_{1y} = -\frac{7}{20} pL \quad , \quad M_{1z} = -\frac{1}{20} pL^2$$

Application à la méthode des éléments finis : pour un élément de poutre droite de section droite constante qui porte sur toute sa longueur L une force répartie dont l'intensité linéique varie linéairement entre p et 0, le vecteur force est :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} -F_{1y} \\ -M_{1z} \\ -F_{2y} \\ -M_{2z} \end{Bmatrix} = \frac{pL}{60} \begin{Bmatrix} 21 \\ 3L \\ 9 \\ -2L \end{Bmatrix}$$

ENER_21

L'arc (1 – 2) de centre O et de rayon moyen R est encastré en 1. Il a une section droite constante. Soit I_z le moment quadratique de la section droite. E est le module de Young du matériau.



L'arc est soumis en 2 à un couple de composantes $(0, 0, C)$.

On néglige l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant.

1. Expression du moment fléchissant $Mf_z(\varphi)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.
4. Calculer les déplacements u_2 et v_2 de la section 2.

Solution**Rotation de la section 2**

Le moment fléchissant dans la section droite φ est C , d'où l'énergie de déformation :

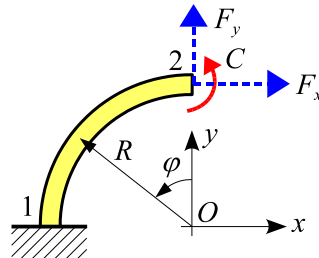
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} C^2 \underbrace{ds}_{R d\varphi} = \frac{\pi}{4} \frac{C^2 R}{EI_z}$$

et la rotation de la section 2 :

$$\theta_{2z} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} = \frac{\pi}{2} \frac{CR}{EI_z}$$

Translation de la section 2

Introduisons dans la section 2 une force auxiliaire de composantes $(F_x, F_y, 0)$.



Le moment fléchissant dans la section droite φ est :

$$Mf_z(\varphi) = C - RF_x(1 - \cos \varphi) + RF_y \sin \varphi$$

d'où :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial F_x} = -R(1 - \cos \varphi) \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial F_y} = R \sin \varphi$$

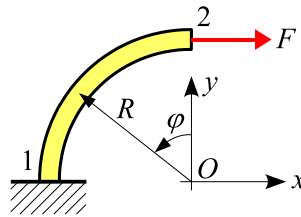
On en déduit les déplacements de la section 2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_x} \right|_{F_x=F_y=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\pi/2} Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F_x} R d\varphi \Big|_{F_x=F_y=0} \\ &= -\frac{CR^2}{EI_z} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) d\varphi = -\frac{CR^2}{EI_z} [\varphi - \sin \varphi]_0^{\pi/2} = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{CR^2}{EI_z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_y} \right|_{F_x=F_y=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\pi/2} Mf_z \frac{\partial Mf_z}{\partial F_y} R d\varphi \Big|_{F_x=F_y=0} \\ &= \frac{CR^2}{EI_z} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{CR^2}{EI_z} [-\cos \varphi]_0^{\pi/2} = \frac{CR^2}{EI_z} \end{aligned}$$

ENER_22

L'arc (1 – 2) de centre O et de rayon moyen R est encasté en 1. Il a une section droite constante. Soit I_z le moment quadratique de la section droite. E est le module de Young du matériau.



L'arc est soumis en 2 à une force de composantes $(F, 0, 0)$.

On néglige l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant.

1. Expression du moment fléchissant $Mf_z(\varphi)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.
4. Calculer le déplacement v_2 de la section 2.
5. Calculer la rotation θ_{z2} de la section 2.

Solution

Déplacement horizontal de la section 2

Le moment fléchissant dans la section droite φ est :

$$Mf_z(\varphi) = -RF(1 - \cos \varphi)$$

d'où l'énergie de déformation :

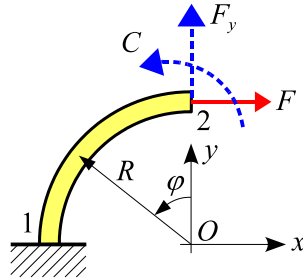
$$\begin{aligned}
 E_{\text{def}} &= \frac{1}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} M f_z^2 \underbrace{ds}_{R d\varphi} = \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi \\
 &= \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} - 2 \cos \varphi\right) d\varphi = \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \left[\frac{3\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} - 2 \sin \varphi \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{F^2 R^3}{2EI_z}
 \end{aligned}$$

et le déplacement horizontal de la section 2 :

$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{FR^3}{EI_z}$$

Déplacement vertical et rotation de la section 2

Introduisons dans la section 2 une force auxiliaire de composantes $(0, F_y, 0)$ et un couple auxiliaire de composantes $(0, 0, C)$.



Le moment fléchissant dans la section droite φ est :

$$M f_z(\varphi) = C - RF(1 - \cos \varphi) + RF_y \sin \varphi$$

d'où :

$$\frac{\partial M f_z}{\partial F_y} = R \sin \varphi \quad , \quad \frac{\partial M f_z}{\partial C} = 1$$

On en déduit le déplacement vertical de la section 2 :

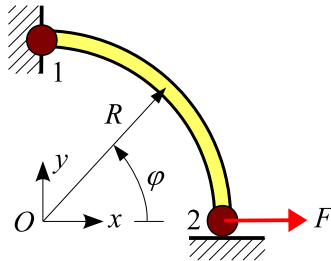
$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F_y} \Big|_{F_y=C=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\pi/2} M f_z \frac{\partial M f_z}{\partial F_y} R d\varphi \Big|_{F_y=C=0} = -\frac{FR^3}{EI_z} \int_0^{\pi/2} \left(\sin \varphi - \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi}_{\frac{\sin(2\varphi)}{2}} \right) d\varphi \\
 &= -\frac{FR^3}{EI_z} \left[-\cos \varphi + \frac{\cos(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{FR^3}{2EI_z}
 \end{aligned}$$

et la rotation de la section 2 :

$$\begin{aligned}
 \theta_{2z} &= \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} \Big|_{F_y=C=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\pi/2} M f_z \frac{\partial M f_z}{\partial C} R d\varphi \Big|_{F_y=C=0} = -\frac{FR^2}{EI_z} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi) d\varphi \\
 &= -\frac{FR^2}{EI_z} [\varphi - \sin \varphi]_0^{\pi/2} = \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{FR^2}{EI_z}
 \end{aligned}$$

ENER_23

L'arc (1 – 2) de centre O et de rayon moyen R et de section droite constante. Il est articulé en 1 et repose sur un appui simple de normale verticale en 2. Soit I_z le moment quadratique de la section droite. E est le module de Young du matériau.



L'arc est soumis en 2 à une force de composantes $(F, 0, 0)$.

On néglige l'influence de l'effort tranchant (modèle de Bernoulli).

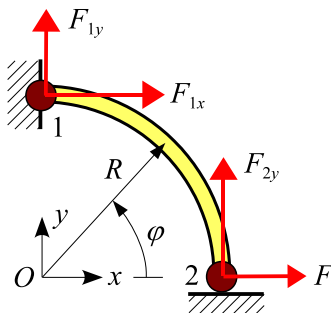
1. Expression du moment fléchissant $M_f(\varphi)$ et de l'effort normal $N(\varphi)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.
4. Donner la position et la valeur du moment fléchissant maximal.
5. Calculer la rotation θ_{2z} de la section 2.
6. La section droite est un rectangle plein de base b et de hauteur h . On donne :

$$E = 210000 \text{ MPa} , R = 100 \text{ mm} , b = 21 \text{ mm} , h = 4 \text{ mm} , F = 200 \text{ N}$$

Calculer u_2 et θ_{2z} .

Solution**Déplacement horizontal de la section 2**

Les réactions d'appui sont F_{1x} , F_{1y} et F_{2y} .



Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$F_{1x} + F = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad , \quad RF + RF_{2y} = 0$$

d'où :

$$F_{1x} = -F \quad , \quad F_{1y} = F \quad , \quad F_{2y} = -F$$

Le moment fléchissant et l'effort normal dans la section droite d'abscisse φ sont :

$$Mf_z(\varphi) = RF \sin \varphi + RF_{2y} (1 - \cos \varphi) = FR (\sin \varphi + \cos \varphi - 1)$$

$$N(\varphi) = F \sin \varphi - F_{2y} \cos \varphi = F (\sin \varphi + \cos \varphi)$$

d'où l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} Mf_z^2 \underbrace{ds}_{R d\varphi} + \frac{1}{2EA} \int_0^{\pi/2} N^2 ds \\ &= \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi + \cos \varphi - 1)^2 d\varphi + \frac{F^2 R}{2EA} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi + \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \int_0^{\pi/2} (2 + \sin(2\varphi) - 2 \sin \varphi - 2 \cos \varphi) d\varphi + \frac{F^2 R}{2EA} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin(2\varphi)) d\varphi \\ &= \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \left[2\varphi - \frac{\cos(2\varphi)}{2} + 2 \cos \varphi - 2 \sin \varphi \right]_0^{\pi/2} + \frac{F^2 R}{2EA} \left[\varphi - \frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= (\pi - 3) \frac{F^2 R^3}{2EI_z} + \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \frac{F^2 R}{2EA} \end{aligned}$$

et le déplacement horizontal de la section 2 :

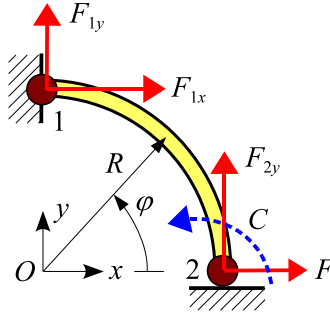
$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = (\pi - 3) \frac{FR^3}{EI_z} + \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \frac{FR}{EA}$$

Remarque : le moment fléchissant est maximal pour $\varphi = \pi/4$ et :

$$Mf_{\text{max}} = (\sqrt{2} - 1) FR$$

Rotation de la section 2

Introduisons en 2 un couple auxiliaire C .



L'action de liaison F_{2y} est alors égale à :

$$F_{2y} = -F - \frac{C}{R}$$

d'où l'expression du moment fléchissant :

$$Mf_z(\varphi) = RF \sin \varphi + RF_{2y} (1 - \cos \varphi) + C = FR (\sin \varphi + \cos \varphi - 1) + C \cos \varphi$$

et de l'effort normal :

$$N(\varphi) = F \sin \varphi - F_{2y} \cos \varphi = F (\sin \varphi + \cos \varphi) + \frac{C}{R} \cos \varphi$$

On en déduit :

$$\frac{\partial Mf_z}{\partial C} = \cos \varphi \quad , \quad \frac{\partial Mf_z}{\partial C} = \frac{\cos \varphi}{R}$$

La rotation de la section 2 est égale à :

$$\begin{aligned} \theta_{2z} &= \left. \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial C} \right|_{C=0} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\pi/2} Mf \frac{\partial Mf}{\partial C} R d\varphi \Big|_{C=0} + \frac{1}{EA} \int_0^{\pi/2} N \frac{\partial N}{\partial C} R d\varphi \Big|_{C=0} \\ &= \frac{FR^2}{EI_z} \int_0^{\pi/2} \left(\underbrace{\sin \varphi \cos \varphi}_{\frac{\sin(2\varphi)}{2}} + \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} - \cos \varphi \right) d\varphi + \frac{F}{EA} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{FR^2}{EI_z} \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} - \sin \varphi \right]_0^{\pi/2} + \frac{F}{EA} \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \frac{FR^2}{EI_z} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \frac{F}{EA} \end{aligned}$$

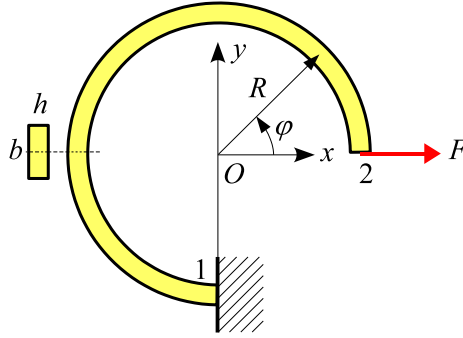
Application numérique

Avec « RDM-Ossatures », l'arc étant discrétisé en éléments de poutre droite de même longueur, on obtient :

nombre d'éléments	u_2 en mm	θ_{2z} en degrés
3	0.986 -18.31 %	1.206 -13.32 %
5	1.124 -6.87 %	1.323 -4.91 %
10	1.186 -1.73 %	1.374 -1.24 %
20	1.202 -0.41 %	1.387 -0.31 %
40	1.206 -0.08 %	1.390 -0.09 %
solution analytique	1.207	1.391

ENER_24

L'arc (1 – 2) de centre O et de rayon moyen R est encastré en 1. Il a une section droite constante. Soient A , I_z et k les caractéristiques de la section droite. E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.



L'arc est soumis en 2 à une force horizontale de composantes $(F, 0, 0)$.

On prend en compte l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant.

1. Donner l'expression de l'effort normal $N(\varphi)$, de l'effort tranchant $T(\varphi)$ et du moment fléchissant $Mf_z(\varphi)$.
2. Calculer l'énergie de déformation.
3. Calculer le déplacement u_2 de la section 2.
4. La section droite est rectangulaire :

$$A = bh \quad , \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad k = \frac{5}{6}$$

On donne :

$$R = 60 \text{ mm} \quad , \quad b = 10 \text{ mm} \quad , \quad h = 6 \text{ mm}$$

$$E = 200000 \text{ MPa} \quad , \quad \nu = 0.25 \quad , \quad F = 30 \text{ N}$$

Calculer u_2 .

Solution

Les efforts dans l'arc sont :

$$N(\varphi) = F \sin \varphi \quad , \quad T(\varphi) = F \cos \varphi \quad , \quad Mf_z(\varphi) = RF \sin \varphi$$

d'où l'énergie de déformation :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^{3\pi/2} N^2 \underbrace{\frac{ds}{R d\varphi}} + \frac{1}{2GAk} \int_0^{3\pi/2} T^2 \underbrace{\frac{ds}{R d\varphi}} + \frac{1}{2EI_z} \int_0^{3\pi/2} Mf_z^2 \underbrace{\frac{ds}{R d\varphi}}$$

$$= \frac{F^2 R}{2EA} \int_0^{3\pi/2} \underbrace{\sin^2 \varphi}_{\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}} d\varphi + \frac{F^2 R}{2GAk} \int_0^{3\pi/2} \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} d\varphi + \frac{F^2 R^3}{2EI_z} \int_0^{3\pi/2} \underbrace{\sin^2 \varphi}_{\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}} d\varphi$$

soit :

$$E_{\text{def}} = \frac{3\pi}{8} \frac{F^2 R}{EA} + \frac{3\pi}{8} \frac{F^2 R}{GAk} + \frac{3\pi}{8} \frac{F^2 R^3}{EI_z}$$

On en déduit le déplacement horizontal de la section 2 :

$$u_2 = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial F} = \underbrace{\frac{3\pi}{4} \frac{FR}{EA}}_{\text{effort normal}} + \underbrace{\frac{3\pi}{4} \frac{FR}{GAk}}_{\text{effort tranchant}} + \underbrace{\frac{3\pi}{4} \frac{FR^3}{EI_z}}_{\text{moment fléchissant}}$$

Application numérique :

$$u_2 = \underbrace{0.00035}_{0.08 \%} + \underbrace{0.00106}_{0.25 \%} + \underbrace{0.42412}_{99.67 \%} = 0.42553 \text{ mm}$$

Chapitre 4

Méthode des éléments finis

4.1 Rappels

4.1.1 Énergie de déformation

Expression de l'énergie de déformation en fonction des contraintes et des déformations

Si le comportement du matériau est élastique et linéaire, l'énergie de déformation contenue dans le volume dV est (formule de Clapeyron) :

$$\begin{aligned} dE_{\text{def}} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} + \gamma_{xy} \sigma_{xy} + \gamma_{xz} \sigma_{xz} + \gamma_{yz} \sigma_{yz}) dV \\ &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad , \quad dV = dx dy dz \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

avec les relations cinématiques :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

et la relation de comportement :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (4.1.3)$$

où :

$u(x, y, z; t)$, $v(x, y, z; t)$ et $w(x, y, z; t)$ sont les composantes du champ de déplacements.

$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}\}^T$ est le vecteur contrainte.

$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T$ est le vecteur déformation.

$[D]$ est la matrice des coefficients élastiques. Si le matériau est isotrope, elle ne dépend que du module de Young E et du coefficient de Poisson ν (cours d'élasticité).

Remarque : l'énergie de déformation s'exprime en joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N.m} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$).

Énergie de déformation d'un élément

L'énergie de déformation d'un élément s'écrit :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (4.1.4)$$

où $\{u\}$ et $[k]$ sont respectivement le vecteur des déplacements nodaux et la matrice de rigidité.

Application aux poutres droites

L'énergie de déformation accumulée dans un tronçon de poutre, de longueur dx , soumis à un effort normal N est égale à :

$$dE_{\text{def}} = \frac{1}{2} N \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.1.5)$$

où $u(x)$ est le déplacement suivant x .

L'énergie de déformation accumulée dans un tronçon de poutre, de longueur dx , soumis à un moment de flexion Mf_z est égale à :

$$dE_{\text{def}} = \frac{1}{2} Mf_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x} dx = \frac{1}{2} EI_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.1.6)$$

où $\theta_z(x)$ et $v(x)$ sont respectivement la rotation suivant z et le déplacement suivant y . Si on adopte l'hypothèse de Bernoulli :

$$\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.1.7)$$

l'énergie de déformation s'écrit :

$$dE_{\text{def}} = \frac{1}{2} EI_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.1.8)$$

L'énergie de déformation accumulée dans un tronçon de poutre, de longueur dx , soumis à un moment de torsion M_t est égale à :

$$dE_{\text{def}} = \frac{1}{2} M_t \frac{\partial \theta_x}{\partial x} dx = \frac{1}{2} GJ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.1.9)$$

où $\theta_x(x)$ est la rotation suivant x .

4.1.2 Énergie cinétique

Expression générale

L'énergie cinétique contenue dans le volume dV est :

$$dE_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dV = \frac{1}{2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (4.1.10)$$

où $u(x, y, z; t)$, $v(x, y, z; t)$ et $w(x, y, z; t)$ sont les composantes du déplacement du point de coordonnées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

Énergie cinétique d'un élément

L'énergie cinétique d'un élément s'écrit :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \quad (4.1.11)$$

où $\{\dot{u}\}$ et $[m]$ sont respectivement le vecteur des vitesses nodales et la matrice de masse.

Application aux poutres droites

L'énergie cinétique d'un tronçon de poutre, de longueur dx , soumis à un effort normal N est égale à :

$$dE_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 dx \quad (4.1.12)$$

où $u(x; t)$ est le déplacement suivant x .

L'énergie cinétique de translation d'un tronçon de poutre, de longueur dx , soumis à un moment de flexion Mf_z est égale à :

$$dE_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \dot{v}^2 dx \quad (4.1.13)$$

où $v(x; t)$ est le déplacement suivant y (flèche).

4.1.3 Énergie potentielle et éléments finis

L'énergie potentielle est :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{def}} - W_{\text{ext}} = \underbrace{\frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\}}_{E_{\text{def}}} - \underbrace{\{U\}^T \{F\} - \{U\}^T \{F_{\text{nod}}\}}_{W_{\text{ext}}} \quad (4.1.14)$$

où W_{ext} est le travail des forces extérieures pour le déplacement $\{U\}$.

Compte-tenu de la relation :

$$[K] \{U\} = \{F\} + \{F_{\text{nod}}\} \quad (4.1.15)$$

l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} = -E_{\text{def}} \quad (4.1.16)$$

On montre que :

$$E_{\text{pot}}(\text{éléments finis}) \geq E_{\text{pot}}(\text{exacte}) \quad (4.1.17)$$

4.1.4 Modes propres

En l'absence d'amortissement, les équations du mouvement libre d'une structure sont :

$$[M_{LL}] \{\ddot{U}_L\} + [K_{LL}] \{U_L\} = 0 \quad (4.1.18)$$

où $\{U_L\}$ est le vecteur des déplacements inconnus. En posant :

$$\{U_L(t)\} = \{\tilde{U}_L\} \sin \omega t \quad (4.1.19)$$

où $\{\tilde{U}_L\}$ est indépendant du temps, il vient :

$$[K_{LL}] \{\tilde{U}_L\} = \omega^2 [M_{LL}] \{\tilde{U}_L\} \quad (4.1.20)$$

où ω est une pulsation propre de la structure et $\{\tilde{U}_L\}$ le vecteur propre associé.

Les pulsations propres sont les solutions de l'équation :

$$\det([K_{LL}] - \omega^2 [M_{LL}]) = 0 \quad (4.1.21)$$

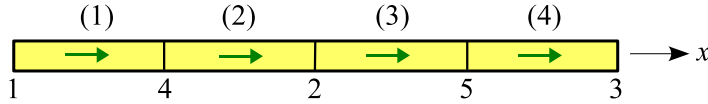
4.2 Exercices

4.2.1 Assemblage

Le vecteur déplacement $\{u^{(e)}\}$ d'un élément s'écrit en fonction du vecteur déplacement de la structure $\{U\}$:

$$\{u^{(e)}\} = [L^{(e)}] \{U\}$$

Considérons, par exemple, la poutre droite soumise à un effort normal représentée sur la figure ci-dessous.



Le vecteur déplacement $\{u^{(2)}\}$ de l'élément (2) est :

$$\{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = [L^{(2)}] \{U\}$$

L'énergie de déformation est :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \\ &= \sum_{\text{éléments}} E_{\text{def}}^{(e)} = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{u^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{U\}^T \underbrace{[L^{(e)}]^T [k^{(e)}] [L^{(e)}]}_{[K^{(e)}]} \{U\} \\ &= \frac{1}{2} \{U\}^T \underbrace{\left(\sum_{\text{éléments}} [K^{(e)}] \right)}_{[K]} \{U\} \end{aligned}$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité :

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [K^{(e)}]$$

Dans l'exemple ci-dessus, on obtient pour la matrice $[K^{(2)}]$:

$$[K^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^{(2)} & 0 & k_{21}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12}^{(2)} & 0 & k_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice de rigidité $[K]$ de la poutre est :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & 0 & 0 & k_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & 0 & k_{21}^{(2)} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{22}^{(4)} & 0 & k_{21}^{(4)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{12}^{(2)} & 0 & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(3)} & k_{12}^{(4)} & 0 & k_{22}^{(3)} + k_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique est :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\} \\ &= \sum_{\text{éléments}} E_{\text{cin}}^{(e)} = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{\dot{u}^{(e)}\}^T [m^{(e)}] \{\dot{u}^{(e)}\} = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \underbrace{[L^{(e)}]^T [m^{(e)}] [L^{(e)}]}_{[M^{(e)}]} \{\dot{U}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T \left(\underbrace{\sum_{\text{éléments}} [M^{(e)}]}_{[M]} \right) \{\dot{U}\} \end{aligned}$$

d'où l'expression de la matrice de masse :

$$[M] = \sum_{\text{éléments}} [M^{(e)}]$$

Le travail des forces extérieures appliquées aux éléments pour le déplacement $u(x)$ est :

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \{U\}^T \{F\} \\ &= \sum_{\text{éléments}} W_{\text{ext}}^{(e)} = \sum_{\text{éléments}} \{u^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\} = \sum_{\text{éléments}} \{U\}^T \underbrace{[L^{(e)}]^T \{f^{(e)}\}}_{\{F^e\}} \\ &= \{U\}^T \left(\underbrace{\sum_{\text{éléments}} \{F^{(e)}\}}_{\{F\}} \right) \end{aligned}$$

d'où l'expression du vecteur force :

$$\{F\} = \sum_{\text{éléments}} \{F^{(e)}\}$$

Dans l'exemple ci-dessus, on obtient pour le vecteur $\{F^{(2)}\}$:

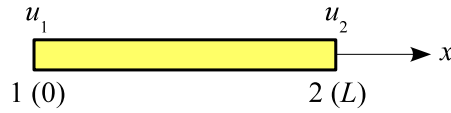
$$\{F^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{(2)} \\ 0 \\ f_1^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

et le vecteur force $\{F\}$ est :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(4)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(3)} + f_1^{(4)} \end{Bmatrix}$$

4.2.2 Élément de poutre droite soumis à un effort normal

On considère un élément à deux nœuds dont les coordonnées nodales sont $x_1 = 0$ et $x_2 = L$. A est l'aire de la section droite. E et ρ sont respectivement le module de Young et la masse volumique du matériau.



Les déplacements nodaux sont $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

Champ de déplacements et fonctions d'interpolation

Le déplacement suivant x des sections droites est de la forme :

$$u(x) = a + b x$$

où a et b sont des constantes.

Des conditions aux limites :

$$u(0) = u_1 = a \quad , \quad u(L) = u_2 = a + bL$$

on déduit :

$$a = u_1 \quad , \quad b = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

d'où l'expression du champ de déplacement en fonction des déplacements nodaux :

$$u(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L}\right)}_{N_1(x)} u_1 + \underbrace{\left(\frac{x}{L}\right)}_{N_2(x)} u_2$$

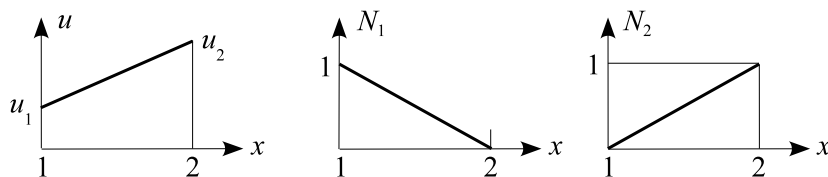
soit :

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{u\}$$

où $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme. Ces fonctions vérifient les relations :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \quad , \quad N_1(x) + N_2(x) = 1$$

où les x_j sont les coordonnées nodales. Le champ de déplacements et les fonctions d'interpolation sont représentés sur la figure ci-dessous.



Déformations et contraintes

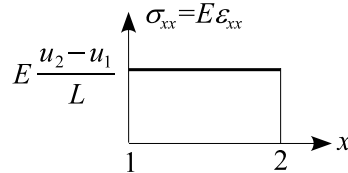
On en déduit l'allongement unitaire :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right] \{u\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{u\} = [B] \{u\} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

et la contrainte normale :

$$\sigma_{xx} = E [B] \{u\} = E \frac{u_2 - u_1}{L}$$

dans l'élément. Ces quantités sont constantes dans l'élément (figure ci-dessous).



Énergie de déformation et matrice de rigidité

L'énergie de déformation est :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_{xx}^2 dx$$

avec :

$$\varepsilon_{xx} = [B] \{u\} = \{u\}^T [B]^T$$

d'où :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\left(\int_0^L EA [B]^T [B] dx \right)}_{[k]} \{u\}$$

On en déduit l'expression de la matrice de rigidité :

$$[k] = \int_0^L EA [B]^T [B] dx = \int_0^L EA \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} dx = \int_0^L EA \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

soit :

$$[k] = \begin{bmatrix} \tilde{k} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} & \tilde{k} \end{bmatrix} \text{ avec } \tilde{k} = \frac{E}{L^2} \int_0^L A dx$$

Cas particuliers :

- Si la section droite est constante, la matrice de rigidité est égale à :

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si la section droite est un rond plein dont le diamètre varie linéairement entre D_1 et D_2 , on a :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) D_1 + \frac{x}{L} D_2 \right)^2$$

d'où :

$$\tilde{k} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{E}{L^2} \left(\underbrace{D_1^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx}_{L/3} + \underbrace{D_2^2 \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx}_{L/3} + 2 D_1 D_2 \underbrace{\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx}_{L/6} \right)$$

et :

$$[k] = \frac{\pi}{12} \frac{E}{L} (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La valeur exacte de $\tilde{k}$ obtenue à l'aide du théorème de Castigliano (§ Méthodes énergétiques : page 90) est :

$$\tilde{k} = \frac{\pi E}{4L} D_1 D_2$$

La table ci-dessous donne l'erreur $(\tilde{k}_{\text{mef}} - \tilde{k}_{\text{exact}})/\tilde{k}_{\text{exact}}$ en fonction de D_2/D_1 .

D_2/D_1	1	1.125	1.25	1.5	1.75	2
erreur	0	0.46 %	1.67 %	5.56 %	10.71 %	16.67 %

Remarque : en général, $\tilde{k}$ est évalué numériquement.

Énergie cinétique et matrice de masse

L'énergie cinétique est :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx$$

avec :

$$\dot{u} = [N] \{\dot{u}\} = [N]^T \{\dot{u}\}^T$$

d'où :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \underbrace{\left(\int_0^L \rho A [N]^T [N] dx \right)}_{[m]} \{\dot{u}\}$$

On en déduit l'expression de la matrice de de masse :

$$[m] = \int_0^L \rho A \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} dx$$

soit :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$m_{11} = \int_0^L \rho A N_1^2 dx = \int_0^L \rho A \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx$$

$$m_{22} = \int_0^L \rho A N_2^2 dx = \int_0^L \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$$

$$m_{12} = m_{21} = \int_0^L \rho A N_1 N_2 dx = \int_0^L \rho A \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx$$

Remarques :

- la somme des termes de la matrice de masse est égale à la masse de l'élément :

$$m_e = \int_0^L \rho A dx$$

– si la section droite est constante, la matrice de masse est :

$$[m] = \frac{m_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vecteur force dû à une force répartie

Le travail de la force répartie d'intensité linéique p pour le déplacement $u(x) = [N] \{u\} = \{u\}^T [N]^T$ est :

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L p u \, dx = \{u\}^T \underbrace{\left(\int_0^L p [N]^T \, dx \right)}_{\{f\}}$$

d'où l'expression du vecteur force :

$$\{f\} = \int_0^L p \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Si la force est répartie linéairement entre p_1 et p_2 :

$$p(x) = p_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + p_2 \frac{x}{L}$$

il vient :

$$f_1 = \int_0^L p N_1 \, dx = p_1 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx + p_2 \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L}{3} p_1 + \frac{L}{6} p_2$$

$$f_2 = \int_0^L p N_2 \, dx = p_1 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx + p_2 \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{6} p_1 + \frac{L}{3} p_2$$

d'où :

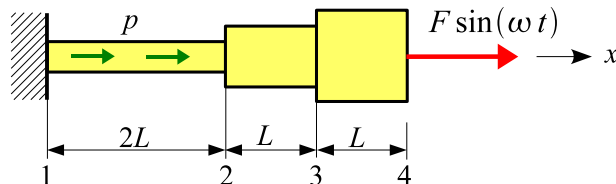
$$\{f\} = \frac{L}{6} \begin{Bmatrix} 2p_1 + p_2 \\ p_1 + 2p_2 \end{Bmatrix}$$

La discrétisation de la force répartie est représentée sur la figure ci-dessous.



4.2.3 Exercice : mise en équation

La poutre d'axe x représenté sur la figure est discrétisée en trois éléments à deux nœuds. Soient E et ρ le module de Young et la masse volumique du matériau. L'aire de la section droite est égale à A entre les nœuds 1 et 2, $2A$ entre les nœuds 2 et 3 et à $3A$ entre les nœuds 3 et 4. La section 1 est encastree.



La poutre porte entre 1 et 2 une force uniformément répartie d'intensité linéique p .

La section 4 est soumise à une force $F_{4x} = F \sin \omega t$.

Les conditions initiales sont $u(x; t = 0) = \dot{u}(x; t = 0) = 0$.

1. Effectuer l'assemblage.
2. Construire l'équation dont les déplacements inconnus sont les solutions.
3. Donner l'expression de la réaction d'appui en fonction des déplacements inconnus.
4. Calculer les pulsations propres.

Solution

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{3-4}] = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[m_{1-2}] = [m_{2-3}] = \frac{2\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [m_{3-4}] = \frac{3\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{f_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} pL \\ pL \end{Bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 4 & 2 & & \\ 2 & 4+4 & 2 & \\ & 2 & 4+6 & 3 \\ & & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & & \\ -1/2 & 1/2+2 & -2 & \\ & -2 & 2+3 & -3 \\ & & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = ? \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 0 \\ F_{4x} = F \sin \omega t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL \\ pL \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation :

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ 0 \\ F \sin \omega t \end{Bmatrix}$$

avec les conditions initiales : $u_2(0) = u_3(0) = u_4(0) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_3(0) = \dot{u}_4(0) = 0$.

La réaction d'appui est donnée par la relation :

$$F_{1x} = \frac{\rho AL}{3} \ddot{u}_2 - \frac{EA}{2L} u_2 - pL$$

Les pulsations propres sont les solutions de l'équation caractéristique :

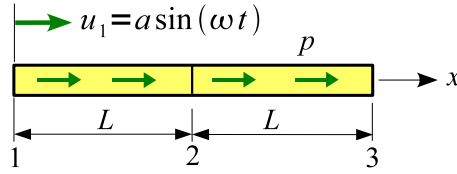
$$\det \left(\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \right) = 0$$

d'où :

$$\omega = 0.2780, 1.4736, 3.1711 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

4.2.4 Exercice : mise en équation

La poutre d'axe x représenté sur la figure est discrétisée en deux éléments à deux nœuds. Soient E et ρ le module de Young et la masse volumique du matériau. L'aire de la section droite est égale à A .



La poutre porte sur toute sa longueur une force uniformément répartie d'intensité linéique p .

La section 1 est soumise à un déplacement imposé $u_1 = a \sin \omega t$.

Les conditions initiales sont $u(x; t = 0) = \dot{u}(x; t = 0) = 0$.

1. Effectuer l'assemblage.
2. Construire l'équation dont les déplacements inconnus sont les solutions.
3. Donner l'expression de la réaction d'appui en fonction des déplacements inconnus.

Solution

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = [k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [m_{1-2}] = [m_{2-3}] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{f_{1-2}\} = \{f_{2-3}\} = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage conduit à la relation $[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_{\text{nod}}\} + \{F\}$:

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2+2 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 = -a\omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = a \sin \omega t \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_{1x} = ? \\ F_{2x} = 0 \\ F_{3x} = 0 \end{Bmatrix} + \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Les déplacements inconnus $u_2(t)$ et $u_3(t)$ sont les solutions de l'équation :

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{6} \begin{Bmatrix} a\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} a \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

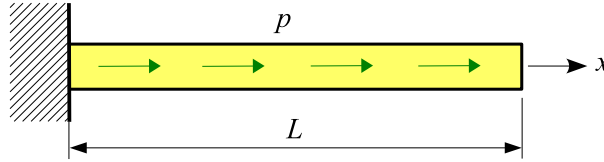
avec les conditions initiales : $u_2(0) = u_3(0) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_3(0) = 0$.

La réaction d'appui est donnée par la relation :

$$F_{1x} = \frac{\rho AL}{6} (-2a\omega^2 \sin \omega t + \ddot{u}_2) + \frac{EA}{L} (a \sin \omega t - u_2) - \frac{1}{2} pL$$

4.2.5 Exercice : contraintes et énergie de déformation

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soient E le module de Young du matériau et A l'aire de la section droite supposée constante.



La section 1 est encastée. Elle est soumise à une force uniformément répartie sur toute sa longueur d'intensité linéique p .

1. Pour plusieurs discrétisations, calculer les contraintes dans les éléments et l'énergie de déformation de la poutre.
2. Représenter graphiquement la variation de l'énergie de déformation en fonction de la discrétisation.

Solution exacte

L'effort normal dans la poutre est :

$$N = p(L - x)$$

d'où l'énergie de déformation :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2 dx = \frac{p^2}{2EA} \int_0^L (L - x)^2 dx = \frac{p^2 L^3}{6EA} = 0.167 \frac{p^2 L^3}{EA}$$

Le champ de déplacements est solution de l'équation :

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} \quad \text{avec} \quad u(0) = 0$$

d'où :

$$u(x) = \frac{px}{2EA} (2L - x)$$

Solution éléments finis

Remarque : l'énergie de déformation est égale à :

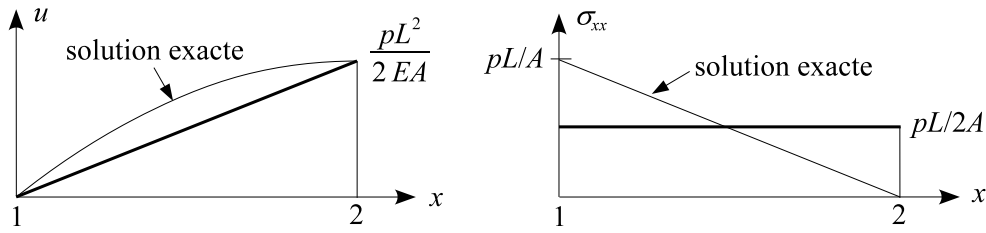
$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dV = \frac{1}{2} \int_0^L A \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dx$$

1. La poutre est discrétisée en un élément à deux nœuds. Les déplacements nodaux sont :

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2} \frac{pL^2}{EA}$$

La déformation et la contrainte élémentaires sont :

$$\varepsilon_{xx}(1-2) = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{1}{2} \frac{pL}{EA} \quad \sigma_{xx}(1-2) = \frac{1}{2} \frac{pL}{A}$$



L'énergie de déformation de la poutre est :

$$E_{\text{def}} = \frac{p^2 L^2}{2EA} \left(\frac{5}{6}\right)^2 L = \frac{1}{8} \frac{p^2 L^3}{EA} = 0.125 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (\text{erreur : } -25.00 \%)$$

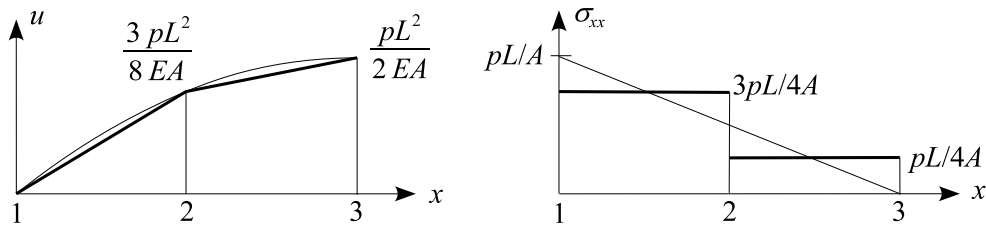
2. La poutre est discrétisée en deux éléments à deux nœuds de même longueur $L/2$. Les déplacements nodaux sont :

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = \frac{3}{8} \frac{pL^2}{EA} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{2} \frac{pL^2}{EA}$$

Les déformations et les contraintes élémentaires sont :

$$\varepsilon_{xx}(1-2) = \frac{u_2 - u_1}{L/2} = \frac{3}{4} \frac{pL}{EA} \quad \varepsilon_{xx}(2-3) = \frac{u_3 - u_2}{L/2} = \frac{1}{4} \frac{pL}{EA}$$

$$\sigma_{xx}(1-2) = \frac{3}{4} \frac{pL}{A} \quad , \quad \sigma_{xx}(2-3) = \frac{1}{4} \frac{pL}{A}$$



L'énergie de déformation de la poutre est :

$$E_{\text{def}} = \frac{p^2 L^2}{2EA} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) \frac{L}{2} = \frac{5}{32} \frac{p^2 L^3}{EA} = 0.156 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (\text{erreur : } -6.25 \%)$$

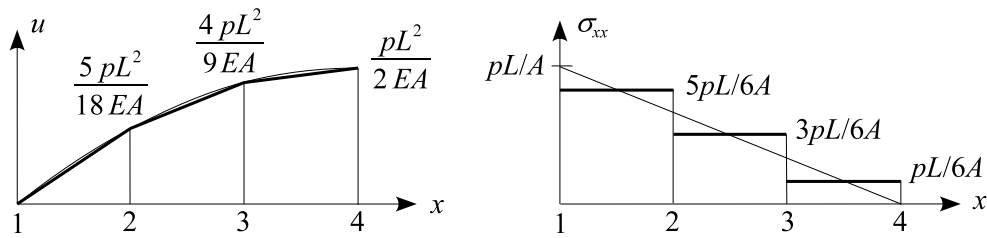
3. La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds de même longueur $L/3$. Les déplacements nodaux sont :

$$u_1 = 0 \quad u_2 = \frac{5}{18} \frac{pL^2}{EA} \quad u_3 = \frac{4}{9} \frac{pL^2}{EA} \quad u_4 = \frac{1}{2} \frac{pL^2}{EA}$$

Les déformations et les contraintes élémentaires sont :

$$\varepsilon_{xx}(1-2) = \frac{u_2 - u_1}{L/3} = \frac{5}{6} \frac{pL}{EA} \quad \varepsilon_{xx}(2-3) = \frac{u_3 - u_2}{L/3} = \frac{3}{6} \frac{pL}{EA} \quad \varepsilon_{xx}(3-4) = \frac{u_4 - u_3}{L/3} = \frac{1}{6} \frac{pL}{EA}$$

$$\sigma_{xx}(1-2) = \frac{5}{6} \frac{pL}{A} \quad , \quad \sigma_{xx}(2-3) = \frac{3}{6} \frac{pL}{A} \quad , \quad \sigma_{xx}(3-4) = \frac{1}{6} \frac{pL}{A}$$

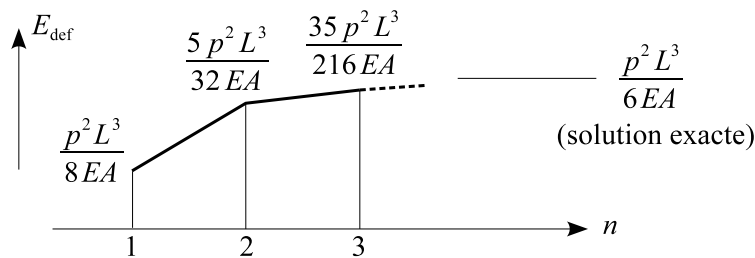


L'énergie de déformation de la poutre est :

$$E_{\text{def}} = \frac{p^2 L^2}{2EA} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right) \frac{L}{3} = \frac{35}{216} \frac{p^2 L^3}{EA} = 0.162 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (\text{erreur : } -2.78 \%)$$

Conclusion

Le graphe ci-dessous représente la variation de l'énergie de déformation en fonction de la discrétisation.

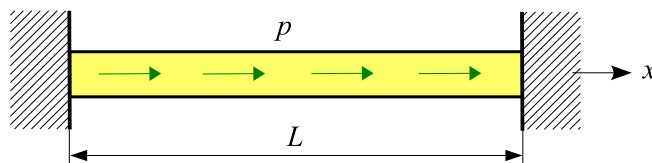


On a :

$$E_{\text{def}}(1 \text{ élément}) < E_{\text{def}}(2 \text{ éléments}) < E_{\text{def}}(3 \text{ éléments}) < E_{\text{def}}(\text{exacte})$$

4.2.6 Exercice : contraintes et énergie de déformation

Considérons la poutre d'axe x représentée sur la figure. Soient E le module de Young du matériau et A l'aire de la section droite supposée constante.



Les deux extrémités de la poutre sont encastrees. Elle est soumise à une force uniformément répartie sur toute sa longueur d'intensité linéique p .

1. Pour plusieurs discrétisations, calculer les contraintes dans les éléments et l'énergie de déformation de la poutre.
2. Représenter graphiquement la variation de l'énergie de déformation en fonction de la discrétisation.

Solution exacte.

L'effort normal dans la poutre est :

$$N = \frac{pL}{2} - px$$

d'où l'énergie de déformation :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2 dx = \frac{p^2 L^3}{24EA} = 0.0417 \frac{p^2 L^3}{EA}$$

Le champ de déplacements est solution de l'équation :

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} \quad \text{avec} \quad u(0) = 0$$

d'où :

$$u(x) = \frac{px}{2EA} (L - x)$$

Solution éléments finis

Remarque : l'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dV = \frac{1}{2} \int_0^L A \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dx$$

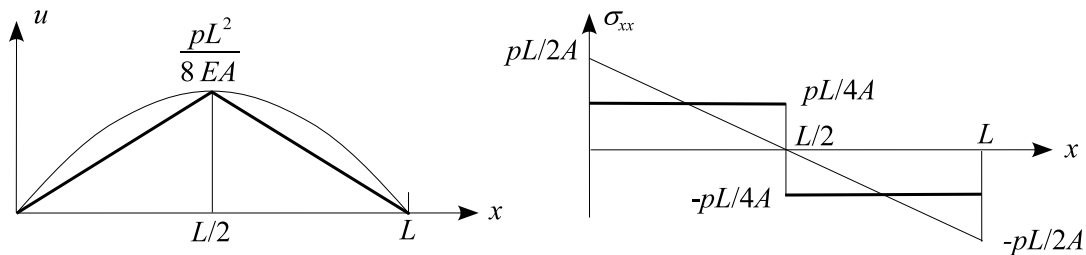
1. La poutre est discrétisée en deux éléments à deux nœuds de même longueur $L/2$. Les déplacements nodaux sont :

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{8} \frac{pL^2}{EA} \quad , \quad u_3 = 0$$

Les déformations et les contraintes élémentaires sont :

$$\varepsilon_{xx}(1-2) = \frac{u_2 - u_1}{L/2} = \frac{1}{4} \frac{pL}{EA} \quad \varepsilon_{xx}(2-3) = -\varepsilon_{xx}(1-2)$$

$$\sigma_{xx}(1-2) = \frac{1}{4} \frac{pL}{A} \quad , \quad \sigma_{xx}(2-3) = -\sigma_{xx}(1-2)$$



L'énergie de déformation de la poutre est :

$$E_{\text{def}} = \frac{p^2 L^2}{2EA} 2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \frac{L}{2} = \frac{1}{32} \frac{p^2 L^3}{EA} = 0.0313 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (\text{erreur : } -25.00 \%)$$

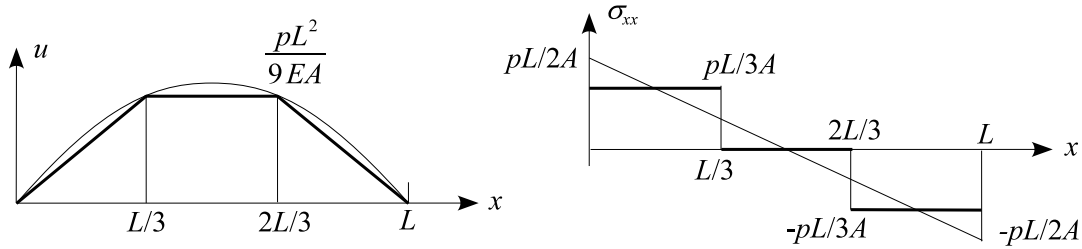
2. La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds de même longueur $L/3$. Les déplacements nœdaux sont :

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{9} \frac{pL^2}{EA} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{9} \frac{pL^2}{EA} \quad , \quad u_4 = 0$$

Les déformations et les contraintes élémentaires sont :

$$\varepsilon_{xx}(1-2) = \frac{u_2 - u_1}{L/3} = \frac{1}{3} \frac{pL}{EA} \quad \varepsilon_{xx}(2-3) = \frac{u_3 - u_2}{L/3} = 0 \quad \varepsilon_{xx}(3-4) = -\varepsilon_{xx}(1-2)$$

$$\sigma_{xx}(1-2) = \frac{1}{3} \frac{pL}{A} \quad , \quad \sigma_{xx}(2-3) = 0 \quad , \quad \sigma_{xx}(3-4) = -\sigma_{xx}(1-2)$$



L'énergie de déformation de la poutre est :

$$E_{\text{def}} = \frac{p^2 L^2}{2 EA} 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \frac{L}{3} = \frac{1}{27} \frac{p^2 L^3}{EA} = 0.0370 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (\text{erreur : } -11.11 \%)$$

3. La poutre est discrétisée en quatre éléments à deux nœuds de même longueur $L/4$. Les déplacements nœdaux sont :

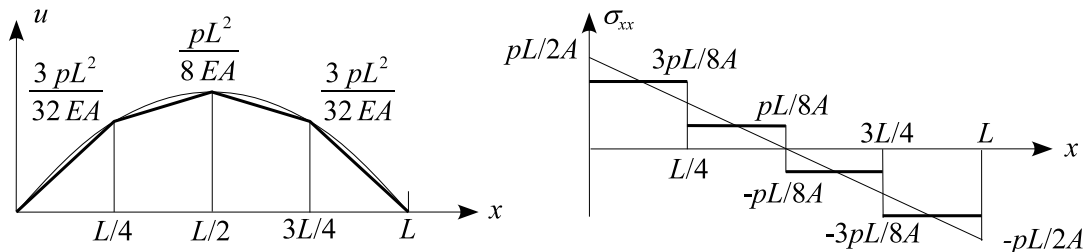
$$u_1 = 0 \quad u_2 = \frac{3}{32} \frac{pL^2}{EA} \quad u_3 = \frac{1}{8} \frac{pL^2}{EA} \quad u_4 = \frac{3}{32} \frac{pL^2}{EA} \quad u_6 = 0$$

Les déformations et les contraintes élémentaires sont :

$$\varepsilon_{xx}(1-2) = \frac{u_2 - u_1}{L/4} = \frac{3}{8} \frac{pL}{EA} \quad \varepsilon_{xx}(2-3) = \frac{u_3 - u_2}{L/4} = \frac{1}{8} \frac{pL}{EA}$$

$$\varepsilon_{xx}(3-4) = -\varepsilon_{xx}(2-3) \quad \varepsilon_{xx}(4-5) = -\varepsilon_{xx}(1-2)$$

$$\sigma_{xx}(1-2) = \frac{3}{8} \frac{pL}{A} \quad \sigma_{xx}(2-3) = \frac{1}{8} \frac{pL}{A} \quad \sigma_{xx}(3-4) = -\sigma_{xx}(2-3) \quad \sigma_{xx}(4-5) = -\sigma_{xx}(1-2)$$

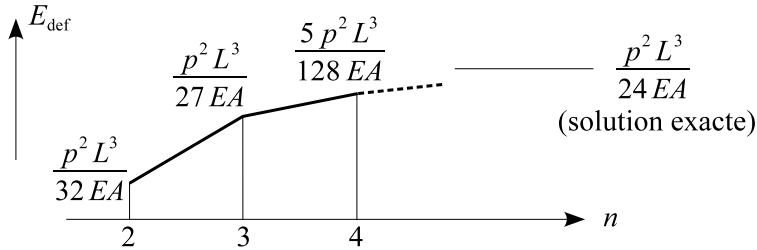


L'énergie de déformation de la poutre est :

$$E_{\text{def}} = \frac{p^2 L^2}{2 EA} \left(2 \left(\frac{3}{8} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{8} \right)^2 \right) \frac{L}{4} = \frac{5}{128} \frac{p^2 L^3}{EA} = 0.0390 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (\text{erreur : } -6.25 \%)$$

Conclusion

Le graphe ci-dessous représente la variation de l'énergie de déformation en fonction de la discrétisation.

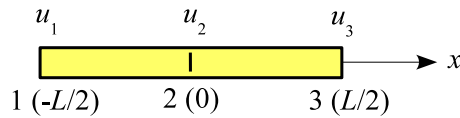


On a :

$$E_{\text{def}}(2 \text{ élément}) < E_{\text{def}}(3 \text{ éléments}) < E_{\text{def}}(4 \text{ éléments}) < E_{\text{def}}(\text{exacte})$$

4.2.7 Élément de poutre droite soumis à un effort normal

On considère l'élément à trois nœuds équidistants représenté sur la figure. A est l'aire de la section droite. E et ρ sont respectivement le module de Young et la masse volumique du matériau.



Les déplacements nodaux sont : u_1 , u_2 et u_3 .

Champ de déplacements et fonctions d'interpolation

Le déplacement suivant x des sections droites est de la forme :

$$u(x) = a + b x + c x^2$$

où a , b et c sont des constantes.

Des conditions aux limites :

$$u(-L/2) = u_1 = a - \frac{1}{2} b L + \frac{1}{4} c L^2 \quad , \quad u(0) = u_2 = a \quad , \quad u(L/2) = u_3 = a + \frac{1}{2} b L + \frac{1}{4} c L^2$$

on déduit :

$$a = u_2 \quad , \quad b = \frac{1}{L} (u_3 - u_1) \quad , \quad c = \frac{2}{L^2} (u_1 + u_3 - 2 u_2)$$

d'où l'expression du champ de déplacement en fonction des déplacements nodaux :

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 + N_3(x) u_3 = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [N] \{u\}$$

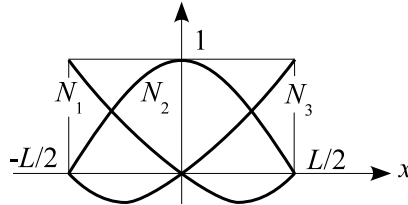
où $N_1(x)$, $N_2(x)$ et $N_3(x)$ sont les fonctions d'interpolation ou fonctions de forme :

$$[N] = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} x(2x - L) & L^2 - 4x^2 & x(2x + L) \end{bmatrix}$$

Ces fonctions vérifient les relations :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad \sum_{i=1}^3 N_i(x) = 1$$

où les x_j sont les coordonnées nodales. Les fonctions d'interpolation sont représentés sur la figure ci-dessous.



Déformations et contraintes

On en déduit l'allongement unitaire :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right] \{u\} = [B] \{u\}$$

avec :

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3] = \frac{1}{L^2} [4x - L \quad -8x \quad 4x + L]$$

d'où :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_3 - u_1}{L} + \frac{4x}{L^2} (u_1 + u_3 - 2u_2)$$

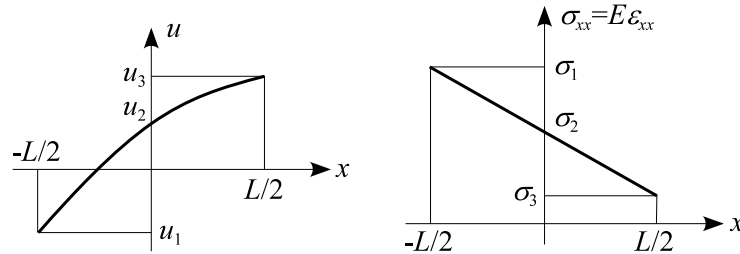
Les déformations nodales sont :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{xx}(0) = \frac{u_3 - u_1}{L} \quad , \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}(-L/2) = \varepsilon_2 - d \quad , \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{xx}(L/2) = \varepsilon_2 + d$$

avec :

$$d = \frac{2}{L} (u_1 + u_3 - 2u_2)$$

La contrainte normale $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E [B] \{u\}$ est linéaire dans l'élément (figure ci-dessous).



Énergie de déformation et matrice de rigidité

L'énergie de déformation est :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EA \varepsilon_{xx}^2 dx = \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\left(\int_{-L/2}^{L/2} EA [B]^T [B] dx \right)}_{[k]} \{u\}$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité :

$$[k] = \int_{-L/2}^{L/2} EA [B]^T [B] dx = \int_{-L/2}^{L/2} EA \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} dx$$

Si la section droite est constante, on obtient :

$$[k] = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

Énergie cinétique et matrice de masse

L'énergie cinétique est :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho A \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \underbrace{\left(\int_{-L/2}^{L/2} \rho A [N]^T [N] dx \right)}_{[m]} \{\dot{u}\}$$

d'où l'expression de la matrice de de masse :

$$[m] = \int_{-L/2}^{L/2} \rho A \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} dx$$

Si la section droite est constante, on obtient :

$$[m] = \frac{m_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

où $m_e = \rho AL$ est la masse de l'élément.

Remarque : la somme des termes de la matrice de masse est égale à m_e .

Vecteur force dû à une force répartie

Le travail de de la force répartie d'intensité linéique p pour le déplacement $u(x) = [N] \{u\} = \{u\}^T [N]^T$ est :

$$W_{\text{ext}} = \int_{-L/2}^{L/2} p u dx = \{u\}^T \underbrace{\left(\int_{-L/2}^{L/2} p [N]^T dx \right)}_{\{f\}}$$

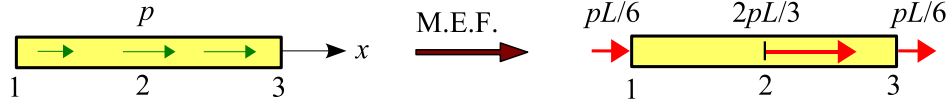
d'où l'expression du vecteur force :

$$\{f\} = \int_{-L/2}^{L/2} p \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} dx$$

Si la force est uniformément répartie sur toute la longueur de l'élément, on obtient :

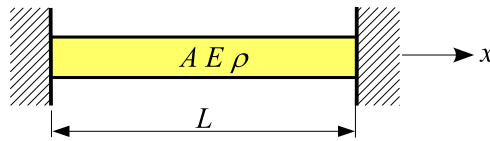
$$\{f\} = \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La discrétisation de cette force uniformément répartie est représentée sur la figure ci-dessous.



4.2.8 Exercice : modes propres

La poutre représentée sur la figure est encastree à ses deux extrémités et sollicitée en traction-compression.



A est l'aire de la section droite. E et ρ sont respectivement le module de Young et la masse volumique du matériau.

Étudier les modes propres de la poutre avec les modélisations suivantes :

1. La poutre est discrétisée en deux éléments à deux nœuds de longueur $L/2$.
2. La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds de longueur $L/3$.
3. La poutre est discrétisée en quatre éléments à deux nœuds de longueur $L/4$.
4. La poutre est discrétisée en un élément à trois nœuds équidistants.

Solution analytique

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\rho A \ddot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

avec les conditions aux limites : $u(x=0; t) = u(x=L; t) = 0$.

La recherche de la solution harmonique :

$$u(x; t) = \tilde{u}(x) \sin(\omega t)$$

conduit à l'équation :

$$E \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \omega^2 \rho \tilde{u} = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{u}(x=0) = \tilde{u}(x=L) = 0$$

qui admet comme solutions :

$$\tilde{u}_n(x) = a \sin \left(n \pi \frac{x}{L} \right) \quad , \quad \omega_n = n \pi \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

d'où :

$$\omega_1 = 3.14 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad , \quad \omega_2 = 6.28 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad , \quad \omega_3 = 9.42 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Solution

1. La poutre est discrétisée en deux éléments à deux nœuds de longueur $L/2$.

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = [k_{2-3}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [m_{1-2}] = [m_{2-3}] = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

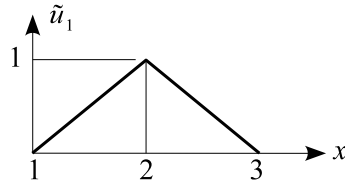
La pulsation propre ω_1 est solution de l'équation :

$$4 \frac{EA}{L} - \omega_1^2 \frac{1}{3} \rho AL = 0$$

d'où :

$$\omega_1 = 3.46 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 10.27 \%)$$

La déformée modale est représentée sur la figure ci-dessous.



2. La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds de longueur $L/3$.

Les modes propres sont les solutions de l'équation :

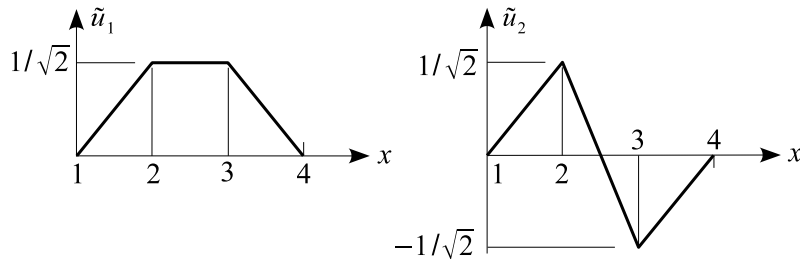
$$\left(\frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \{\tilde{U}_L\} = \{0\}$$

d'où :

$$\omega_1 = 3.29 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 4.61 \%) \quad , \quad \{\tilde{U}_{L1}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 7.35 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 16.95 \%) \quad , \quad \{\tilde{U}_{L2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Les déformées modales sont représentées sur la figure ci-dessous.



3. La poutre est discrétisée en quatre éléments à deux nœuds de longueur $L/4$.

Les modes propres sont les solutions de l'équation :

$$\left(\frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{24} \begin{bmatrix} 4 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \{\tilde{U}_L\} = \{0\}$$

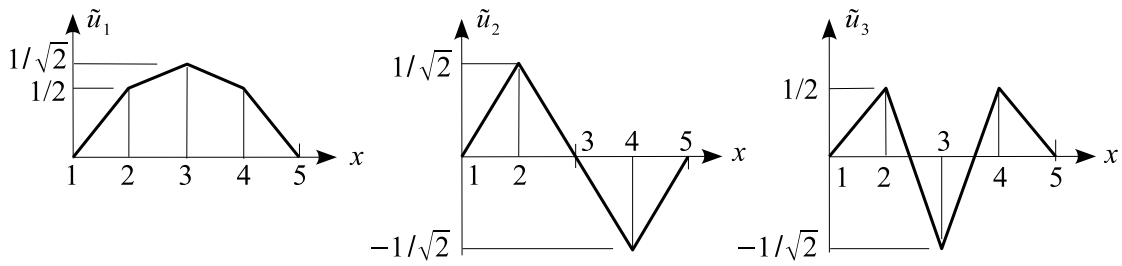
d'où :

$$\omega_1 = 3.22 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 2.59 \%) \quad , \quad \{\tilde{U}_{L1}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 6.93 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 10.27 \%) \quad , \quad \{\tilde{U}_{L2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 11.26 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 19.46 \%) \quad , \quad \{\tilde{U}_{L3}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Les déformées modales sont représentées sur la figure ci-dessous.



4. La poutre est discrétisée en un élément à trois nœuds équidistants.

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2-3}] = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad [m_{1-2-3}] = \frac{\rho AL}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La pulsation propre ω_1 est solution de l'équation :

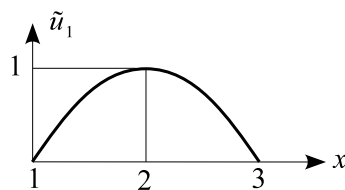
$$\frac{16}{3} \frac{EA}{L} - \omega_1^2 \frac{8}{15} \rho AL = 0$$

d'où :

$$\omega_1 = 3.16 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad (\text{erreur} = 0.66 \%)$$

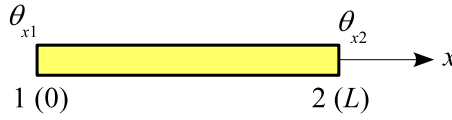
La déformée modale est (figure ci-dessous) :

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{4x}{L^2} (L - x)$$



4.2.9 Élément fini de torsion

On considère l'élément à deux nœuds représenté sur la figure. J est la constante de torsion et G est le module d'élasticité transversal du matériau.



Les déplacements nodaux sont θ_{x1} et θ_{x2} .

Champ de déplacements et fonctions d'interpolation

La rotation des sections droites suivant x est de la forme :

$$\theta_x(x) = a + b x$$

où a et b sont des constantes.

Des conditions aux limites :

$$\theta_x(0) = \theta_{x1} = a \quad , \quad \theta_x(L) = \theta_{x2} = a + bL$$

on déduit :

$$a = \theta_{x1} \quad , \quad b = \frac{\theta_{x2} - \theta_{x1}}{L}$$

d'où l'expression du champ de déplacement en fonction des déplacements nodaux :

$$\theta_x(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L}\right)}_{N_1(x)} \theta_{x1} + \underbrace{\left(\frac{x}{L}\right)}_{N_2(x)} \theta_{x2}$$

soit :

$$\theta_x(x) = N_1(x) \theta_{x1} + N_2(x) \theta_{x2} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = [N] \{u\} = \{u\}^T [N]^T$$

Énergie de déformation et matrice de rigidité

L'énergie de déformation est :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx$$

avec :

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \{u\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \{u\} = [B] \{u\}$$

d'où :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\left(\int_0^L GJ [B]^T [B] dx \right)}_{[k]} \{u\}$$

On en déduit l'expression de la matrice de rigidité :

$$[k] = \int_0^L GJ [B]^T [B] dx = \int_0^L GJ \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} dx = \int_0^L GJ \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$

soit :

$$[k] = \begin{bmatrix} \tilde{k} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} & \tilde{k} \end{bmatrix} \text{ avec } \tilde{k} = \frac{G}{L^2} \int_0^L J \, dx$$

Cas particuliers :

- Si la section droite est constante, la matrice de rigidité est égale à :

$$[k] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si la section droite est un rond plein dont le diamètre varie linéairement entre D_1 et D_2 , on a :

$$J = \frac{\pi}{32} \left(\left(1 - \frac{x}{L}\right) D_1 + \frac{x}{L} D_2 \right)^4$$

d'où :

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{32} \frac{G}{L^2} \int_0^L J \, dx = \frac{\pi G}{160 L} (D_1^4 + D_1^3 D_2 + D_1^2 D_2^2 + D_1 D_2^3 + D_2^4)$$

et :

$$[k] = \tilde{k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La valeur exacte de $\tilde{k}$ obtenue à l'aide du théorème de Castigliano (§ Méthodes énergétiques : page 92) est :

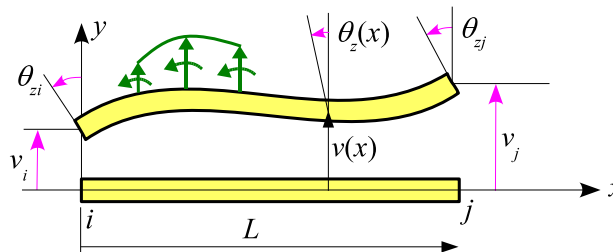
$$\tilde{k} = \frac{3\pi}{32} \frac{G}{L} \frac{D_1^3 D_2^3}{D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2}$$

La table ci-dessous donne l'erreur $(\tilde{k}_{\text{mef}} - \tilde{k}_{\text{exact}})/\tilde{k}_{\text{exact}}$ en fonction de D_2/D_1 .

D_2/D_1	1	1.125	1.25	1.5	1.75	2
erreur	0	1.86 %	6.80 %	23.73 %	48.59 %	80.83 %

4.2.10 Élément fini de flexion : modèle de Bernoulli

On considère un élément à deux nœuds de longueur L . E et ρ sont respectivement le module de Young et la masse volumique du matériau. I_z est le moment quadratique de la section droite.



Les déplacements nodaux sont v_1 , θ_{z1} , v_2 et θ_{z2} .

Champ de déplacements et fonctions d'interpolation

Le déplacement suivant y (flèche) est de la forme :

$$v(x) = a + b x + c x^2 + d x^3$$

où a , b , c et d sont des constantes.

La rotation des sections droites est (hypothèse de Bernoulli) :

$$\theta_z(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = b + 2cx + 3dx^2$$

Des conditions aux limites :

$$v_1 = v(0) = a \quad , \quad \theta_{z1} = \theta_z(0) = b$$

$$v_2 = v(L) = a + bL + cL^2 + dL^3 \quad , \quad \theta_{z2} = \theta_z(L) = b + 2cL + 3dL^2$$

on déduit :

$$a = v_1 \quad , \quad b = \theta_{z1}$$

$$c = \frac{3}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{1}{L} (2\theta_{z1} + \theta_{z2}) \quad , \quad d = \frac{2}{L^3} (v_1 - v_2) + \frac{1}{L^2} (\theta_{z1} + \theta_{z2})$$

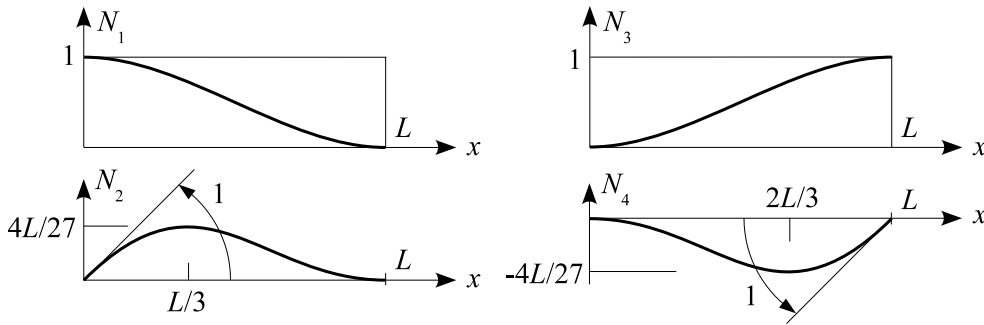
Le champ de déplacement s'écrit donc :

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_{z1} + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_{z2} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = [N] \{u\}$$

où les fonctions d'interpolations sont :

$$N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \quad , \quad N_2 = L \left(\frac{x}{L} - 2 \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \quad , \quad N_4 = L \left(\frac{x^3}{L^3} - \frac{x^2}{L^2} \right)$$



Remarque : le champ de déplacements :

$$v(x) = [N] u$$

est le champ de déplacements exact pour un élément de poutre à section constante et non chargé ; en effet, $v(x)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{1}{EI_z} p_y = 0$$

La rotation des sections droites est :

$$\theta_z(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \quad \frac{\partial N_4}{\partial x} \right] \{u\} = [N_\theta] \{u\}$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{\theta 1} &= \frac{6}{L} \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) \quad , \quad N_{\theta 2} = 1 - 4 \frac{x}{L} + 3 \frac{x^2}{L^2} \\ N_{\theta 3} &= \frac{6}{L} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad , \quad N_{\theta 4} = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x}{L} \end{aligned}$$

Énergie de déformation et matrice de rigidité

L'énergie de déformation est égale à :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx$$

avec :

$$\frac{\partial \theta_z}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_{\theta 1}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{\theta 2}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{\theta 3}}{\partial x} \quad \frac{\partial N_{\theta 4}}{\partial x} \right] \{u\} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \{u\} = [B] \{u\}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{6}{L^2} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right) \quad , \quad B_2 = \frac{2}{L} \left(3 \frac{x}{L} - 2 \right) \\ B_3 &= \frac{6}{L^2} \left(1 - 2 \frac{x}{L} \right) \quad , \quad B_4 = \frac{2}{L} \left(3 \frac{x}{L} - 1 \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{\left(\int_0^L EI_z B^T B dx \right)}_{[k]} \{u\}$$

On en déduit l'expression de la matrice de rigidité :

$$[k] = \int_0^L EI_z [B]^T [B] dx = \int_0^L EI_z \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] dx$$

Le coefficient k_{ij} de cette matrice est égal à :

$$k_{ij} = \int_0^L EI_z B_i B_j dx$$

Pour une poutre à section constante :

– le coefficient k_{11} est égal à :

$$k_{11} = EI_z \int_0^L B_1 B_1 dx = \frac{36 EI_z}{L^4} \int_0^L \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2 dx = \frac{12 EI_z}{L^3}$$

– la matrice de rigidité est :

$$[k] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Énergie cinétique de translation et matrice de masse

La vitesse d'une section droite suivant y est :

$$\dot{v} = [N] \{\dot{u}\} = \{\dot{u}\}^T [N]^T$$

d'où l'expression de l'énergie cinétique de translation :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T \underbrace{\left(\int_0^L \rho A [N]^T [N] dx \right)}_{[m]} \{\dot{u}\}$$

et celle de la matrice de masse :

$$[m] = \int_0^L \rho A [N]^T [N] dx = \int_0^L \rho A \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} dx$$

Si la section droite est constante, on obtient :

$$[m] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Vecteur force dû à une force transversale répartie sur l'élément

Le travail de la force transversale d'intensité linéique p pour le déplacement $v(x) = [N] \{u\} = \{u\}^T [N]^T$ est :

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L p v dx = \{u\}^T \underbrace{\int_0^L p [N]^T dx}_{\{f\}}$$

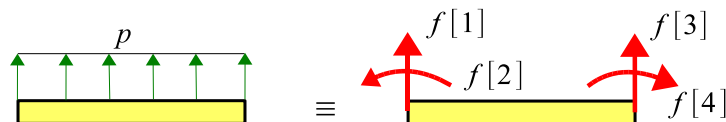
On en déduit l'expression du vecteur force :

$$\{f\} = \int_0^L p \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} dx$$

Si la force est répartie uniformément sur toute la longueur de l'élément, on obtient :

$$\{f\} = \frac{pL}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \\ 6 \\ -L \end{Bmatrix}$$

La discrétisation de la force répartie est représentée sur la figure ci-dessous.



Vecteur force dû à un couple réparti sur l'élément

Le travail du couple réparti d'intensité linéique m pour le déplacement $\theta_z(x) = [N_\theta] \{u\} = \{u\}^T [N_\theta]^T$ est :

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L m \theta_z dx = \{u\}^T \underbrace{\int_0^L m [N_\theta]^T dx}_{\{f\}}$$

On en déduit l'expression du vecteur force :

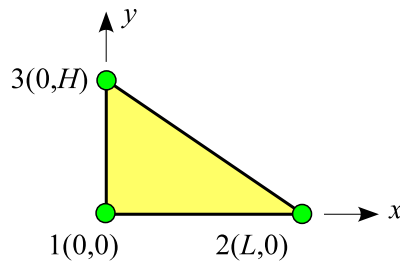
$$\{f\} = \int_0^L m \begin{bmatrix} N_{\theta 1} \\ N_{\theta 2} \\ N_{\theta 3} \\ N_{\theta 4} \end{bmatrix} dx$$

Si le couple est réparti uniformément sur toute la longueur de l'élément, on obtient :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} -m \\ 0 \\ m \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4.2.11 Exercice : élasticité plane

On considère l'élément triangle à trois nœuds d'épaisseur t représenté sur la figure ci-dessous.



Les déplacements nodaux sont : (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) .

1. Donner l'expression des fonctions d'interpolation.
2. Calculer les déformations et les contraintes.
3. Donner sans la calculer l'expression de la matrice de rigidité.

Solution

Fonctions d'interpolation

Le déplacement suivant x est de la forme :

$$u(x, y) = a + b x + c y$$

où a , b et c sont des constantes.

Des conditions aux limites :

$$u(0,0) = u_1 = a \quad , \quad u(L,0) = u_2 = a + bL \quad , \quad u(0,H) = a + cH$$

on déduit :

$$a = u_1 \quad , \quad b = \frac{1}{L} (u_2 - u_1) \quad , \quad c = \frac{1}{H} (u_3 - u_1)$$

Le déplacement $u(x,y)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_1 + \frac{1}{L} (u_2 - u_1) x + \frac{1}{H} (u_3 - u_1) y \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{H}\right)}_{N_1(x,y)} u_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2(x,y)} u_2 + \underbrace{\frac{y}{H}}_{N_3(x,y)} u_3 \end{aligned}$$

Remarque : les fonctions d'interpolation vérifient les relations :

$$\sum_{i=1}^3 N_i(x,y) = 1 \quad , \quad N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

où les (x_j, y_j) sont les coordonnées nodales.

De même, on a :

$$v(x,y) = \left(1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{H}\right) v_1 + \frac{x}{L} v_2 + \frac{y}{H} v_3$$

Déformations et contraintes

Les déformations sont :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_3 - v_1}{H} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u_3 - u_1}{H} + \frac{v_2 - v_1}{L}$$

soit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{H} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ -\frac{1}{H} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{H} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\varepsilon\} = [B] \{u\}$$

Les contraintes $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ sont constantes dans l'élément.

Énergie de déformation et matrice de rigidité

L'énergie de déformation est :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_V \underbrace{\{\varepsilon\}^T}_{\{u\}^T [B]^T} [D] \underbrace{\{\varepsilon\}}_{[B] \{u\}} dV = \frac{1}{2} \{u\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\}$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité :

$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_A t [B]^T [D] [B] dA$$

où t et A sont respectivement l'épaisseur et l'aire de l'élément. Si l'épaisseur de l'élément est constante, il vient :

$$[k] = [B]^T [D] [B] A t$$